

Devoir libre n°5

À rendre le 4/1/2021

Ce devoir est individuel. Il s'agit d'une "gamme" pour reprendre tous les points clés du premier semestre.
Essayez de l'entamer après les fêtes de Noël pour préparer votre rentrée.

Exercice 1

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Vérifier que -2 est racine de P.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(X) = (X + 2)(aX^2 + bX + c)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.

Exercice 2

On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$.

Déterminer l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et trouver deux nombres a et b tels que $A^2 = aA + bI$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et donner A^{-1} .

3. On considère le système : (S) :
$$\begin{cases} 4x + y + z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

- a) Ecrire (S) sous forme matricielle.
- b) Résoudre (S) en utilisant la matrice A^{-1} .

Exercice 4

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \end{cases}$$

Exercice 5

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2}{2n+1}$.