Devoir libre n°6

À rendre le 5 février 2021

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n^2}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $0\leq u_n\leq 1$.

2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

4. On admet que la limite L de la suite (u_n) vérifie $L=\frac{L}{1+L^2}$. *(Point fixe)*

   Déterminer $L=\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x-1$ et $g(x)=xe^x-e^x+1$

1. Calculer les fonctions dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$.

2. En déduire les tableaux de variations des fonctions f et g.

   Quel est le signe de chacune de ces fonctions ?

3. En déduire les encadrements $x\leq e^x-1\leq xe^x$.

4. Conclure : en utilisant la question 3, encadrer $\frac{e^x-1}{x}$ puis montrer que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$

   Vous avez alors prouvé une forme indéterminée de référence.

Exercice 3

Factoriser le polynôme $P(X)=2X^3+4X^2-2X-4$.