Annexe 2 : Fonctions d'une variable réelle, rappels et compléments

1. Notion de fonction.

Définition : *Une fonction d'une variable réelle f* , définie sur un ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$, associe à chaque nombre $x \in D_f$ une unique image $f(x) \in \mathbb{R}$.

On note aussi $f : \begin{pmatrix} D_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$.

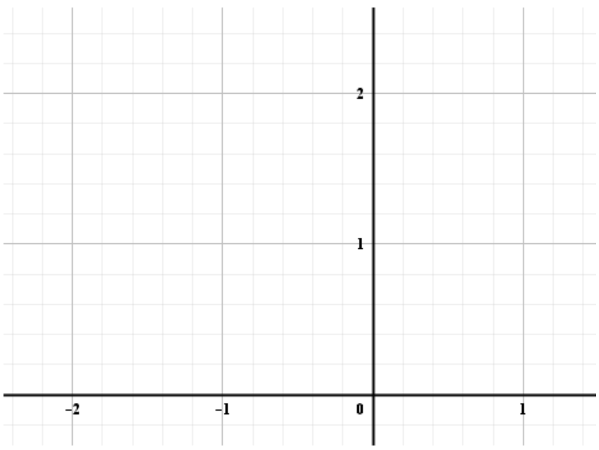
L'ensemble D_f est appelé *ensemble de définition de la fonction f.*

Exemples :

2. Courbe représentative d'une fonction.

Définition : *La courbe représentative d'une fonction f* est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où *x* parcourt l'ensemble de définition D_f . On la note généralement C_f .

Exemple : On considère la fonction $f : \begin{pmatrix} [-2\,;1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 - x + 2 \end{pmatrix}$. Sa courbe représentative est :



3. Fonctions paires et impaires.

Définitions : Soit *f* une fonction définie sur un domaine *symétrique par rapport à 0*.

C'est-à-dire $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$.

- La fonction *f* est *paire* si $\forall x \in D_f, f(-x)=f(x)$.
- La fonction *f* est *impaire* si $\forall x \in D_f, f(-x)=-f(x)$.

Exemples :

Exercice : Étudier la parité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=e^{3x^2+5} \quad , \quad g(x)=6x-2x^2 \quad \text{et} \quad h(x)=4x^2+x$$

Propriétés :

- La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

4. Fonctions majorées, minorées et bornées.

Définitions : Soit *f* une fonction d'une variable réelle.

- La fonction *f* est *majorée* s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D_f , f(x) \leq M$.

  Un tel nombre *M* est alors appelé *majorant de f*.
- La fonction *f* est *minorée* s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D_f , f(x) \geq m$.

  Un tel nombre *m* est alors appelé *minorant de f*.
- La fonction *f* est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemples :

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est minorée par 0.

- La fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = 2x + 1$ est bornée.

Exercice : Montrez que la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$ est bornée.

Définitions : Soit *f* une fonction d'une variable réelle, et $a \in D_f$.

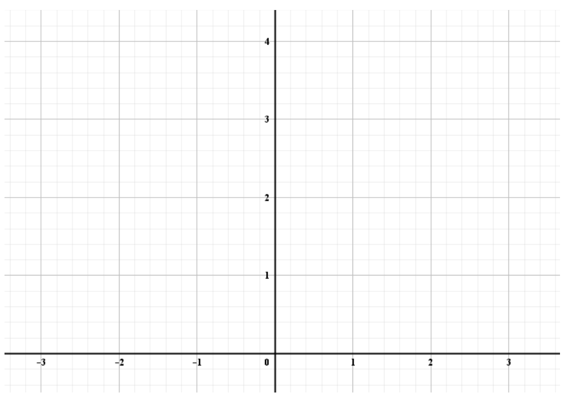
- La fonction *f admet un maximum en a* si $\forall x \in D_f , f(x) \leq f(a)$.

  On note $\max\limits_{x \in D_f} f(x) = f(a)$.
- La fonction *f admet un minimum en a* si $\forall x \in D_f , f(x) \geq f(a)$.

  On note $\min\limits_{x \in D_f} f(x) = f(a)$.

Exemple : La fonction définie par $f(x) = 1 + x^2$ admet un minimum en 0.

En effet $\forall x \in \mathbb{R} , f(x) = 1 + x^2 \geq 1 = f(0)$.



5. Sens de variation d'une fonction.

Définition : Soit *f* une fonction d'une variable réelle.

- La fonction *f* est *croissante* si pour tous x , x' dans D_f , $x > x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$.
- La fonction *f* est *décroissante* si pour tous x , x' dans D_f , $x > x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.
- La fonction *f* est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Remarque : En remplaçant ces inégalités par des inégalités strictes, on définit les fonctions *strictement croissantes*, *strictement décroissantes* et *strictement monotones*.

Exercice : On considère la fonction définie par $f(x) = e^{5x-8}$.

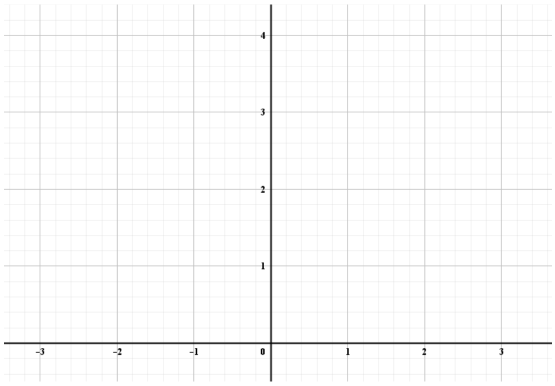
Démontrez par le calcul que cette fonction est croissante.

6. Fonction de référence.

a) Fonction valeur absolue.

Définition : *La fonction valeur absolue* est définie par $\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{pmatrix}$ où $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Représentation graphique de la fonction valeur absolue :



Propriétés : Soient x et y des nombres réels.

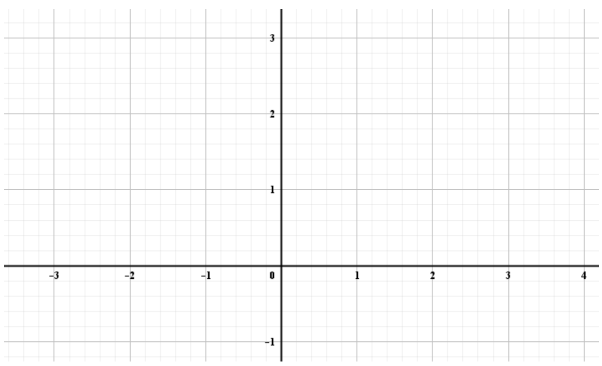
- La fonction valeur absolue est paire : $|-x| =$
- $|x \times y| =$, $|x^n| =$, et si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| =$
- *Inégalité triangulaire :*

b) Fonction partie entière.

Définition : *La fonction partie entière* est définie par $\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{pmatrix}$

où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Représentation graphique de la fonction partie entière :



Propriétés : Pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

c) Fonction exponentielle et logarithme népérien.

Définitions :

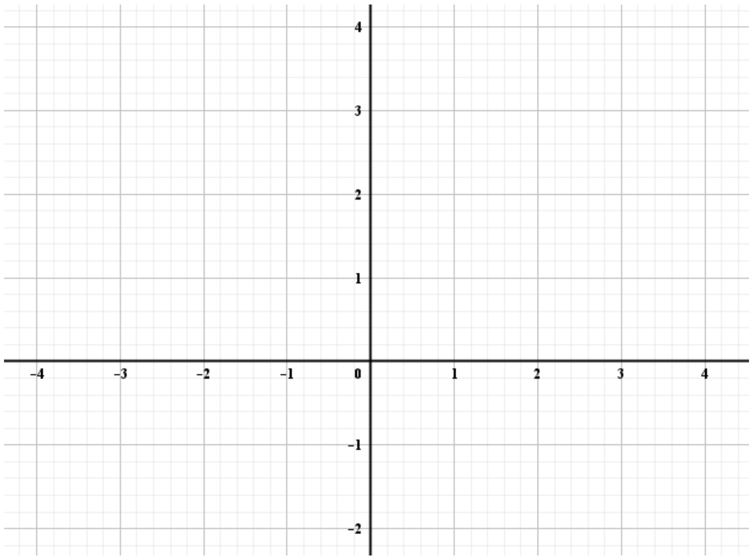
La *fonction exponentielle* est définie par « extension des exposants », et notée

$$\exp : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \mapsto & e^x \end{pmatrix}$$

La *fonction logarithme népérien* est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, et notée

$$\ln : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{pmatrix} .$$

Représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme Népérien :



Propriétés :

- Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont est strictement croissantes.
- Pour tout nombre réel x strictement positif, $\ln(x) < x < e^x$.
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) =$
- $\exp(0) = e^0 =$
- Soient a et b des nombres réels et n un entier.

Alors :

$$e^{a+b} =$$

$$e^{na} =$$

$$e^{a-b} =$$

- Pour tout x > 0 , $e^{\ln(x)} =$
- $\ln(1) =$
- Soient a et b <u>strictement positifs</u> et n un entier.

Alors :

$$\ln(a \times b) =$$

$$\ln(a^n) =$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$$

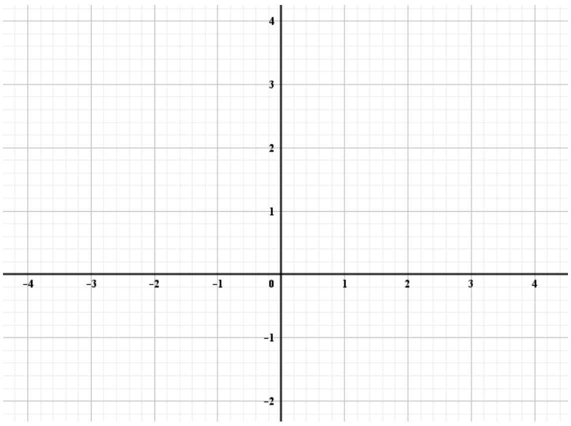
d) Fonctions puissance entière.

Définition : Une *fonction puissance entière* est une fonction de la forme $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

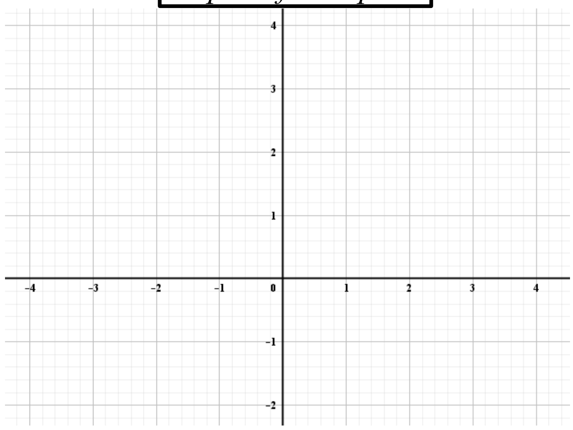
Exemples : Les expressions $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^{-8} = \dfrac{1}{x^8}$ définissent des fonctions puissance.

Représentation graphique d'une fonction puissance entière :

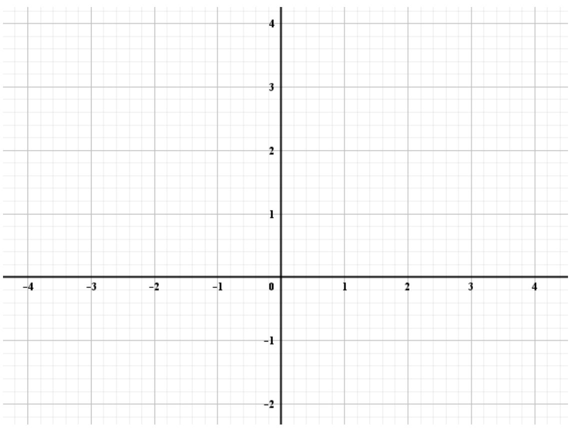
n positif et pair



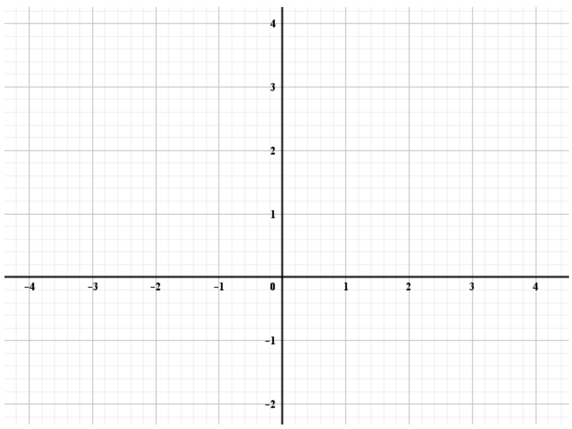
n positif et impair



n négatif et pair



n négatif et impair



Propriétés :

- La fonction puissance entière $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si et sur $\mathbb{R}^*$ si
- La fonction puissance entière $x \mapsto x^n$ est paire si et impaire si
- Si x et y sont des réels et n, m des entiers relatifs, on a

$$x^{n+m} = \qquad (x^n)^m = \qquad \text{et} \quad x^{n-m} =$$

$$(x \times y)^n = \qquad \text{et, si} \quad y \neq 0 \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n =$$

d) Fonctions puissance généralisées.

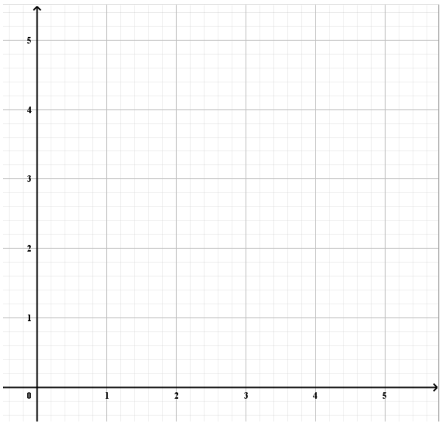
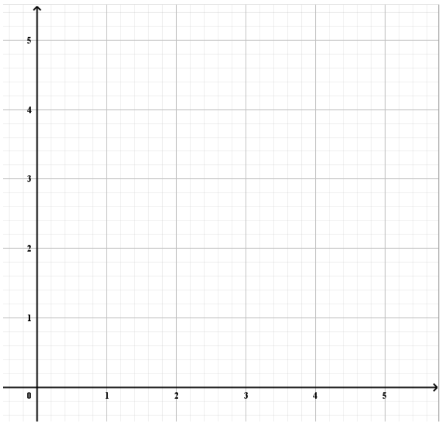
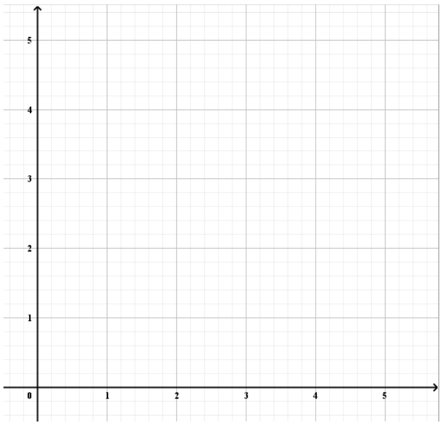
Définition :

Une *fonction puissance* est une fonction de la forme $x \mapsto x^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, définie pour $x > 0$.

On rappelle que dans ce cas $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln(x)}$.

Cas particulier : Pour $x \geq 0$, on a $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Représentation graphique d'une fonction puissance entière :

$\alpha < 0$	$0 < \alpha < 1$	$\alpha > 1$
		

Propriété :

- La fonction puissance entière $x \mapsto x^{\alpha}$ est croissante si et décroissante si
- Si x et y sont des réels strictement positifs et α, β des réels, on a

$$x^{\alpha+\beta} = \qquad \left(x^{\alpha}\right)^{\beta} = \qquad \text{et} \quad x^{\alpha-\beta} =$$

$$(x \times y)^{\alpha} = \qquad \text{et, si } y \neq 0, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} =$$