Annexe 3 : Inversion de matrices par la méthode du pivot de Gauss

<u>Rappel :</u> Une matrice carrée M est *inversible* s'il existe une matrice M^{-1} de même taille, telle que

$$M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I$$

où I désigne la matrice identité (de même taille que M et M^{-1}).

Dans ce cas, la matrice M^{-1} est apelée *matrice inverse de M*.

Pour l'heure, seul le cas des matrices de dimension 2 est complètement connu :

<u>Théorème :</u>

Une matrice carrée d'ordre 2 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - cb \neq 0$

Et dans ce cas $M^{-1} = \dfrac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Dans le cas général, on utilise *la méthode du pivot de Gauss*.

<u>Pour montrer qu'une matrice M est inversible :</u>

On applique les *opérations élémentaires* :

- Echanger deux lignes
- Multiplier une ligne par un nombre non nul
- Ajouter/soustraire un multiple d'une ligne à une autre ligne.

directement sur les lignes de la matrice M pour la mettre sous forme triangulaire.

Si tous les coefficients diagonaux de la matrice obtenue sont non nuls, M est inversible.

Stratégie :

→ Travailler colonne par colonne, de la gauche vers la droite.

→ Faire apparaître, par des soustractions bien choisies, des 0 sous la diagonale.

Exemple : Etudions l'inversibilité de $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour calculer la matrice inverse d'une matrice inversible M :

On présente le calcul en deux colonnes :

- Dans la colonne de gauche, on applique les *opérations élémentaires* sur les lignes de M pour la tranformer en la matrice identité I.
- Dans la colonne de droite, on applique les mêmes opérations à la matrice identité I.

Lorsqu'on a obtenu la matrice I dans la colonne de gauche,

le résultat de la colonne de droite est M^{-1}.

Stratégie :

→ Mettre M sous forme triangulaire (Cf méthode précédente).

→ Ensuite, repartir de la colonne de droite.

→ Faire apparaître, par des soustractions bien choisies, des 0 au-dessus de la diagonale.

La matrice obtenue est diagonale.

→ Si besoin, diviser chaque ligne de sorte à obtenir la matrice identité I.

<u>Exemple :</u> Calculons l'inverse de. $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad\qquad I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 1

Déterminer, à l'aide de la méthode du *pivot de Gauss*, si les matrices suivantes sont inversibles. Le cas échéant, calculer leur inverse.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère la matrice $A_x=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ où x est un nombre réel.

Discuter l'inversibilité de A_x en fonction de la valeur de x.

Exercice 3 *issu d'EMLyon 2013*

Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$