Exercice : Preuve d'une croissance comparée.

On se propose de démontrer la croissance comparée $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n}=+\infty$.

On considère la fonction définie par $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$ pour $x\geq 0$.

1. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ et la dérivée seconde $f''(x)$.

2. Faire le tableau de signes de $f''(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire les variations de $f'(x)$.

3. Quel est le minimum de $f'(x)$? En déduire les variations de *f*.

4. Conclure que $f(x)\geq 0$, et en déduire que $e^x\geq\dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x\geq 0$.

5. En déduire que pour tout entier n non nul, on a $\dfrac{e^n}{n}\geq\dfrac{n}{2}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n}$.