Devoir libre n°8

À rendre le 9 avril

Vouz pouvez travailler en groupes sur ce devoir (3 maxi par groupe).

Exercice 1

Pour tout entier n on pose $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$.

1. Calculer I_0 .

2. a) Calculer l'intégrale I_0+I_1 .

   b) En déduire la valeur de l'intégrale I_1 .

3. a) Ecrire un programme Scilab qui calcule la n-ième somme de Riemann associée à l'intégrale I_2 .

   b) En déduire une valeur approchée I_2 . *Arrondir au centième.*

4. a) Justifier que $\forall x\in[0,1]$, $0\leq\frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\leq x^{2n+1}$.

   b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq I_n\leq\frac{1}{2n+2}$.

   c) Montrer que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 2

Soit *n* un entier naturel non nul. On effectue *n* lancers avec une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p\in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir face est q=1-p. On dit qu'un lancer donné réalise un *changement* s'il amène un résultat différent du lancer précédent.

On note alors X_n le nombre de changements survenus au cours des n lancers.

Par exemple, si on effectue n=5 lancers qui donnent : Pile-Face-Face-Pile-Face alors $X_5=3$.

1. Pour commencer, on considère la situation où on effectue n=2 lancers.

   a) Donner la loi de X_2

   b) Calculer l'espérance et la variance de X_2

2. À présent, on considère que n=3.

   Donner la loi de X_3, et vérifier que $E(X_3)=4pq$ et que $V(X_3)=2pq(3-8pq)$

3. Pour Sami, Mélisande, Samsha, Ali, Réda

   On considère que n=4. Donner la loi de X_4 et calculer son espérance.