Devoir libre n°7

À rendre le 1 mars 2021

Exercice 1

On considère la suite définie par

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$$

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n\leq 2$
2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{2+x}$.
   a) Calculer sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Montrer que pour $x\in[0;2]$ on a $0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
3. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq 2-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(2-u_n)$
4. Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq 2-u_n\leq\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2

Calculer les séries suivantes :

$$S_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{5^n} \qquad S_2=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n}{2^n} \qquad S_3=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8^{n+1}}{n!}$$

Exercice 3

Étudier la convexité de la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2\ln(x)+3}{x}$ sur $]0;+\infty[$