TP 12 : Algorithme de dichotomie (1e partie)

Dans ce TP, nous allons (re)découvrir l'algorithme de dichotomie.
Cet algorithme permet, tout comme l'algorithme du TP7,
de résoudre les équations de type f(x)=0 de façon approchée.

Partie A : Découverte de l'algorithme

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+1$.

Dans le TP7 nous avons établi son tableau de variations :

La théorème de la bijection permet de conclure qu'il existe 3 solutions α , β et γ à l'équation f(x)=0.

Grâce à un algorithme de résolution approximatif, qui consistait à

- calculer les images f(x) en augmentant x par pas de 0,1
- repérer les changements de signe de f(x)

nous avons montré que $-0{,}6<\alpha<-0{,}5$, $0{,}6<\beta<0{,}7$ et $2{,}8<\gamma<2{,}9$.

1. Calculer $f(1)$. Est-ce que β est situé dans l'intervalle [0,1] ou [1,2] ? Expliquer brièvement.

2. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire un intervalle de largeur 0,5 dans lequel est situé β .

Principe de l'algorithme de dichotomie

Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle [a,b], avec $f(a)$ et $f(b)$ <u>de signes opposés</u> (un positif, un négatif)
En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α in [a,b] pour lequel f(α)=0.

On peut trouver un encadrement de α aussi précis qu'on veut en utilisant le principe de dichotomie :

On calcule le centre de l'intervalle $m=\frac{a+b}{2}$.

- ☞ Si f(a) et f(m) sont de signes opposés, le nombre α se trouve dans le premier demi-intervalle [a;m].
- ☞ Si f(a) et f(m) sont de même signe, le nombre α se trouve dans le second demi-intervalle [m;b].

et on recommence ce raisonnement avec le demi-intervalle ciblé.

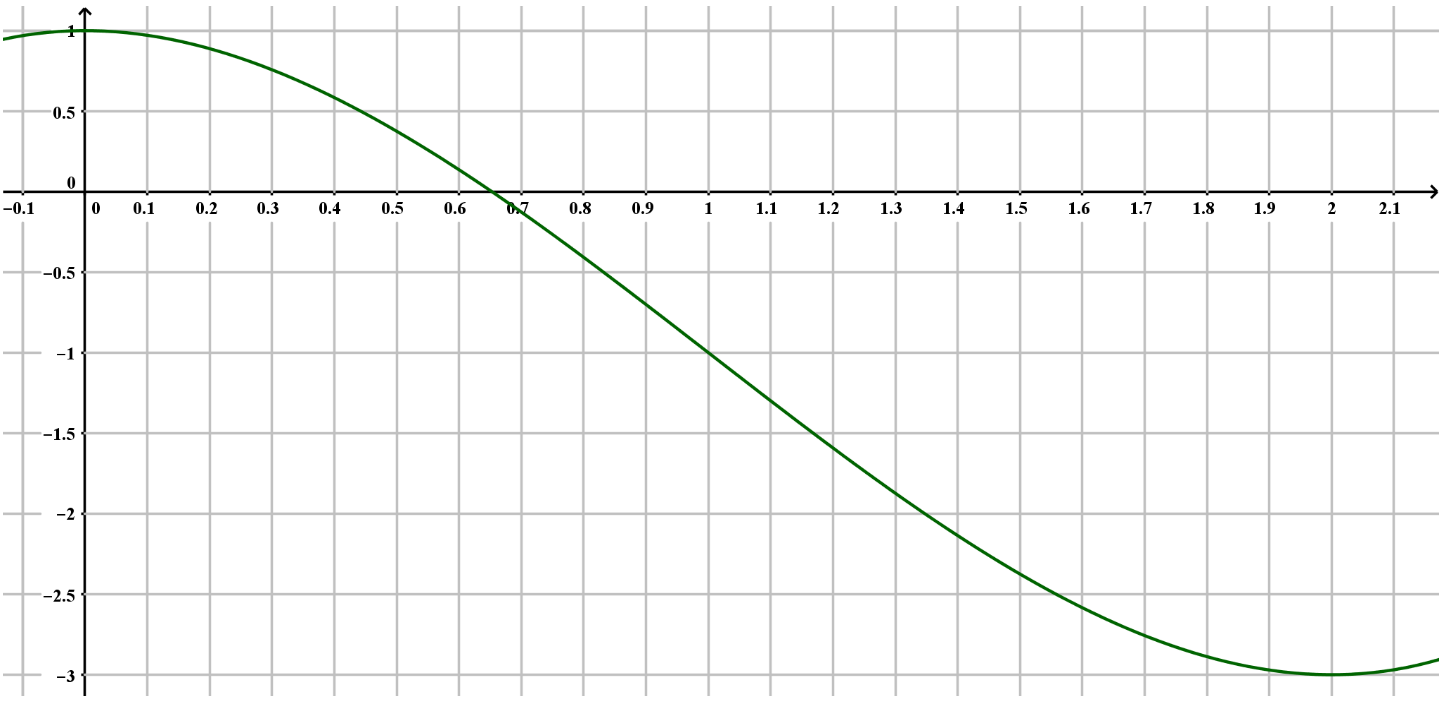
Par ce procédé, on construit une succession d'intervalles $[a_0 ; b_0]$, $[a_1 ; b_1]$, $[a_2 ; b_2]$, …

- ☞ Emboîtés $[a_0 ; b_0] \supset [a_1 ; b_1] \supset [a_2 ; b_2] \supset [a_3 ; b_3] \supset ...$
- ☞ Dont la largeur est divisée par 2 à chaque étape

Partie B : Application graphique de l'algorithme

On a représenté la fonction f sur l'intervalle [0,2].

Construire les cinq premiers intervalles obtenus par l'algorithme de dichotomie.



Taille de l'intervalle

$[a_0 , b_0]$ =

$[a_1 , b_1]$ =

$[a_2 , b_2]$ =

$[a_3 , b_3]$ =

$[a_4 , b_4]$ =

Partie C : Application de l'algorithme « à la main »

Voici l'algorithme de dichotomie, écrit en langage naturel.

1 : Entrer A, B, E
2 : Tant que $B-A>E$ faire
3 : M prend la valeur $\dfrac{A+B}{2}$
4 : Si $f(A)\times f(M)\leq 0$ alors
5 : B prend la valeur M
6 : Sinon
7 : A prend la valeur M
8 : FinSi
9 : FinTantQue
10 : Afficher A,B

1. Expliquer le sens de

La ligne 4

La variable E

2. Entrer la fonction

```
function y=f(x)
    y=x^3-3*x^2+1
endfunction
```

dans un script Scilab pour calculer rapidement les valeurs de *f*, puis exécuter l'algorithme « à la main » dans le tableau suivant, avec l'exemple de la partie A, et **E=0,1**.

Etape	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	0					
B	2					
Test $B-A>E$	VRAI					
$M=\dfrac{A+B}{2}$						
$f(A)$						
$f(M)$						
Test $f(A)\times f(M)\leq 0$						

3. Qu'est-ce que cet algorithme nous apprend ?

Partie D : Calcul du temps d'exécution.

1. Combien d'étapes cet algorithme a-t-il exécuté ?

   Quelle est la longueur de l'intervalle obtenu en fin d'exécution ?

2. Si l'algorithme s'exécute pendant 10 étapes, quelle est la longueur de l'intervalle obtenu ?

   Et s'il s'exécute pendant *n* étapes ?

3. Combien faut-il d'étapes pour que la longueur de l'intervalle obtenu soit inférieure à 0,01 ?

4. Que pensez-vous de la qualité de cet algorithme vis-à-vis de celui utilisé au TP7 ?

Exercice :

Appliquer l'algorithme de dichotomie à la fonction $f(x)=x^2-2$ sur [0,1],

pour obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ au dixième près.

Etape	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A						
B						
Test $B-A>E$						
$M=\dfrac{A+B}{2}$						
$f(A)$						
$f(M)$						
Test $f(A)\times f(M)\leq 0$						