TP 13 : Algorithme de dichotomie (2^e partie)

Dans ce TP, nous allons automatiser l'algorithme de dichotomie, et l'appliquer à deux situations : l'approximation de $\sqrt{2}$ *et l'étude d'une suite implicite.*

Partie A : Rappels et retour à l'exemple.

On reprend la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+1$.

Au TP7, en s'aidant du TVI, on a prouvé qu'il existe 3 solutions α , β et γ à l'équation f(x)=0.

Avec Scilab, on a su montrer que :

$$-0{,}6<\alpha<-0{,}5 \quad , \quad 0{,}6<\beta<0{,}7 \quad \text{et} \quad 2{,}8<\gamma<2{,}9 \quad .$$

par deux méthodes :

- **Méthode incrémentale :** on a calcule f(0), f(0.1), f(0.2) , … jusqu'à observer un changement de signe.
- **Méthode par Dichotomie :** on a situé β dans un intervalle.

  En fonction du signe de la fonction au centre de l'intervalle, on a pu se focaliser sur la moitié de cet intervalle.

  En répétant la méthode, en divisant l'intervalle en 2 à chaque étape, on a fini par encadrer β .

1. On rappelle l'algorithme de dichotomie permettant d'encadrer β , écrit en langage naturel.
   Traduire l'algorithme en langage Scilab, à partir de la ligne 5 du script.

1 : A prend la valeur 0
2 : B prend la valeur 2
3 : E prend la valeur 0.1
4 : Tant que $B-A>E$ faire
5 : M prend la valeur $\dfrac{A+B}{2}$
6 : Si $f(A)\times f(M)\leq 0$ alors
7 : B prend la valeur M
8 : Sinon
9 : A prend la valeur M
10 : FinSi
11 : FinTantQue
12 : Afficher A,B

```
1  function y=f(x)
2      y=x^3-3*x^2+1
3  endfunction
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
```

2. Entrez l'algorithme dans Scilab, et exécutez-le pour retrouver la valeur approchée de β

Trouver une valeur approchée de β avec une précision de 4 chiffres après la virgule.

Manipulation : Valeur approchée :

3.Trouver des valeur approchées des valeurs de α et γ en démarrant, à tour de rôle, l'algorithme sur les intervalles [-2 ; 0] et [2;4].

4. Jusqu'à quelle précision est-ce que Scilab parvient à gérer les calculs ?

Partie B : Application au calcul de $\sqrt{2}$.

On s'intéresse à la fonction définie par $f(x)=x^2-2$.

1. Résoudre l'équation f(x)=0 par le calcul.

2. Justifier brièvement que $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$.

3. Proposer un algorithme de dichotomie permettant de calculer $\sqrt{2}$ avec une précision de 0.001

```
function y=f(x)
    y=
endfunction
```

Résultat :

Partie C : Application à l'étude d'une suite implicite.

Pour tout entier naturel n, on considère l'équation $(E_n): \dfrac{x^3}{1+x^2}=n$, et on définit $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$

1. Calculer la fonction dérivée de f.

2. Dresser les tableau de variations de f, en précisant les limites en $\pm\infty$.

3. En déduire que l'équation (E_n) admet exactement une solution, qu'on notera u_n .

4. Proposer un algorithme de dichotomie premettant de calculer u_1 .

```
function y=f(x)
    y=
endfunction
```

Résultat :

4. En ajustant l'algorithme convenablement, calculer les premiers termes de la suite (u_n) .

$u_0 \simeq$ $u_1 \simeq$ $u_2 \simeq$ $u_3 \simeq$ $u_4 \simeq$

Modification :

5. Calculer u_{10} et conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n) .

Partie C :Démonstration de la conjecture

1. Soit n un entier naturel. On rappelle que $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

   Montrer que $f(n) \leq n$, et l'inscrire dans le tableau de variations de *f*.

2. En déduire que $n \leq u_n$.

3. En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

4. **Optionnel :** Montrer que $f(n+1) \geq n$ et en déduire que $u_n \leq n+1$.