TP 10 : Méthode d'intégration de Monte-Carlo

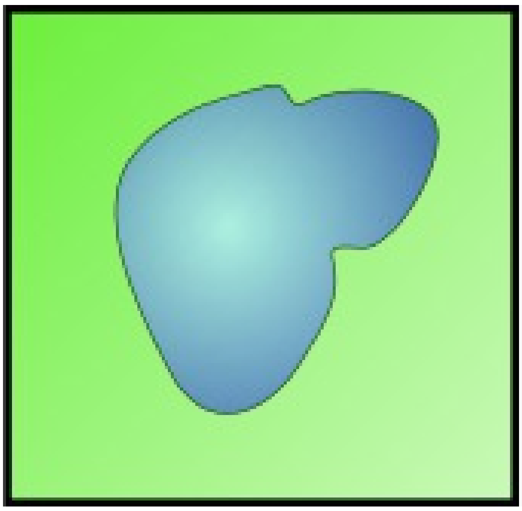
Le but de ce TP est de découvrir la méthode d'intégration de Monte-Carlo
et de la mettre en application sur des exemples simples.

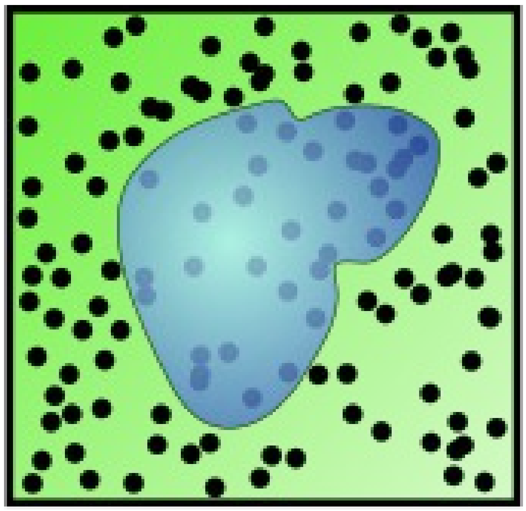
Partie A : Principe et exemple simple.

La *méthode d'intégration de Monté-Carlo* consiste à utiliser des valeurs aléatoires pour calculer une superficie.

En voici un exemple classique :

On considère une zone de 1000 m² dans lequel se trouve un lac dont on souhaite calculer la superficie.
Pour ce faire, l'armée accepte de tirer 500 boulets de canon dans la zone.
Après comptage, on constate que seulement 100 boulets on atterri au fond du lac.

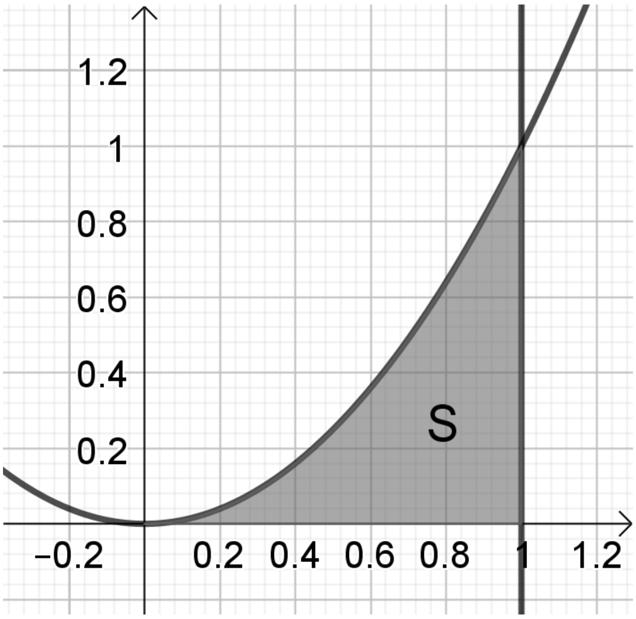




À combien estimez-vous la superficie du lac ?

Partie B : Calcul d'une intégrale simple.

On considère la surface ***S*** située entre la courbe d'équation $y=x^2$, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x=1$.



1. Écrire cette aire de cette surface comme une intégrale et calculer sa valeur.

2. Compléter l'algorithme suivant, afin qu'il

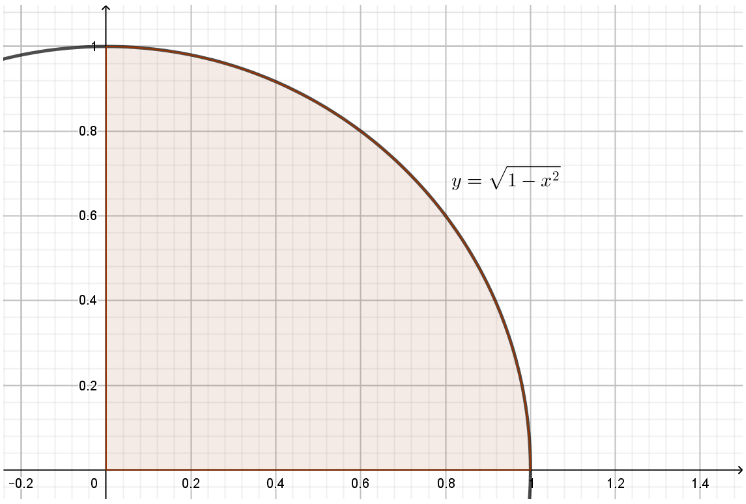
- crée 10000 fois un point de coordonnées (x,y) aléatoires entre 0 et 1,
  La commande `rand()` *permet de tirer un nombre au hasard dans l'intervalle [0,1]*
- comptabilise le nombre de fois où ce point est situé dans la surface ***S*** dans une variable S
- affiche la proportion S/10000

```
S

for i=1:10000 do
    x=
    y=
    if       then
        S=
    end
end

disp(          )
```

Résultat :

Exercice 1 *Estimation de π*

On considère le quart de cercle unité supérieur droit. On rappelle qu'il a pour équation $y=\sqrt{1-x^2}$.



Proposer un algorithme basé sur la méthode de Monte-Carlo qui permet d'approcher cette aire.

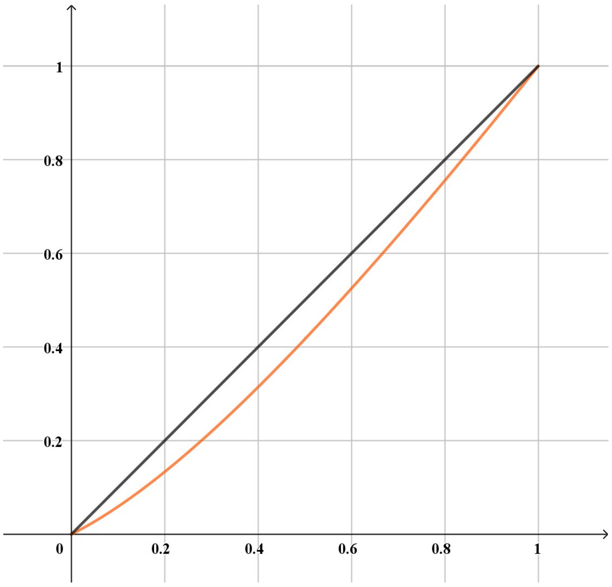
```
S

for i=1:10000 do
    x=
    y=
    if        then
        S=
    end
end

disp(          )
```

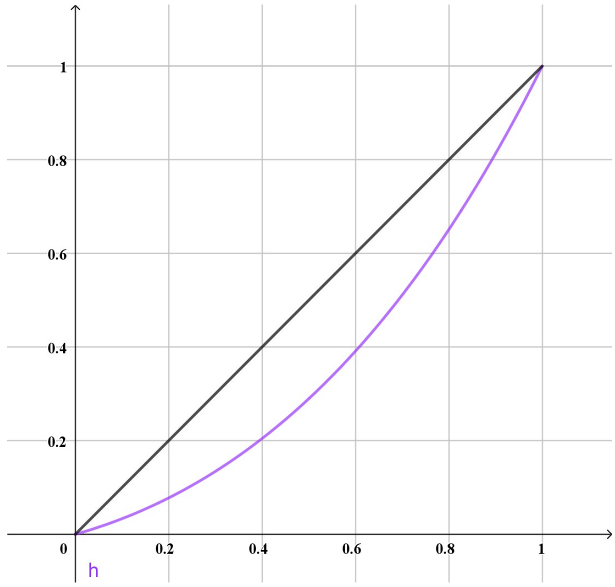
En déduire une valeur approchée de π .

Exercice 2 *Calcul d'un indice de Gini*

On considère les fonctions définies par

$$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{x+1}-1 \qquad \text{et} \qquad g(x)=e^{x}-(e-2)x-1$$





Leurs courbes sont des *courbes de Lorentz* : elles illustrent les répartition des richesses dans deux pays A et B. Par exemple, l'image $f(0{,}3)$ représente les revenus des 30% les moins riches du pays A.

On comprend que les richesses d'un pays sont équitablement réparties si sa courbe de Lorentz est confondue avec la diagonale d'équation $y=x$. Les inégalités seront d'autant plus importantes que ces courbes sont éloignées. On mesure donc l'inégalité des richesses d'un pays par *l'indice de Gini*, qui correpond

*au **double** de l'aire entre la diagonale et la courbe de Lorentz.*

Mettez en œuvre l'algorithme de Monte-Carlo pour calculer les indices de Gini des pays A et B, puis conclure.

```
S

for i=1:10000 do
    x=
    y=
    if          then
          S=
    end
end

disp(            )
```

```
S

for i=1:10000 do
    x=
    y=
    if          then
          S=
    end
end

disp(            )
```