TP 11 : Sommes de Riemann et intégrales impropres

Rappel : Sommes de Riemann

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle [a,b]. Les sommes de Riemann

$$S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n'(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

permettent de calculer des valeur approchées de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

Partie A : Un exemple simple, script général

On souhaite estimer l'intégrale $I=\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ à l'aide de la somme de Riemann $S_{1000}(f)$.

1. Compléter le script Scilab suivant pour y parvenir :

```
function y=f(x)
    y=
endfunction

N=
A=
B=

S=
for k=    :
    S=
end

disp(S)
```

2. Entrez le script et donnez une valeur approchée de l'intégrale I.

Exercice

En utilisant le script précédent, donner des valeurs approchées des intégrales suivantes :

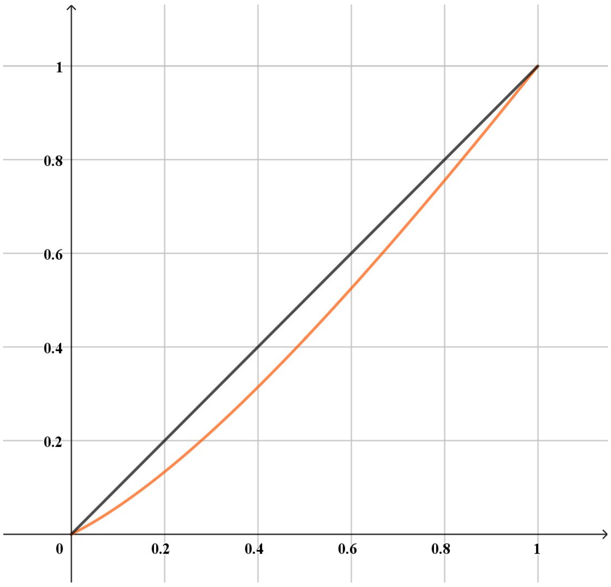
$I_1=\int_1^2 x\,e^{x^2}\,dx$ $\qquad$ $I_2=\int_0^{100}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ $\qquad$ $I_3=\int_2^5\frac{t-1}{t\,e^t}\,dt$ $\qquad$ $I_4=\int_{-1}^1 \ln(1+x^2)\,dx$

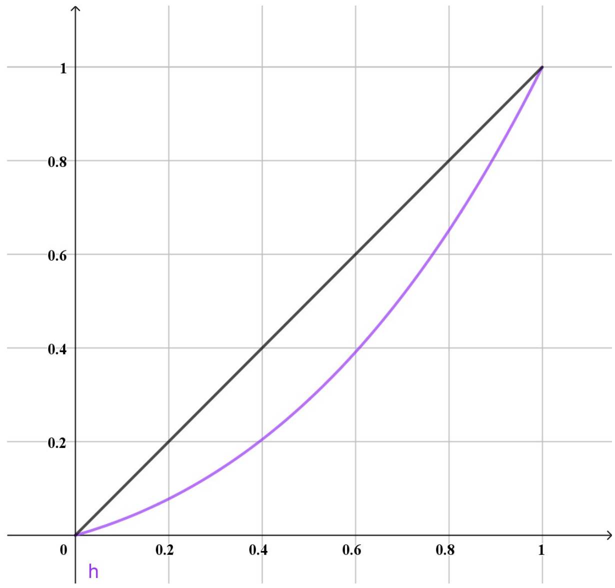
Expliquez vos opérations :

Partie B : Application au calcul d'indices de Gini

On considère les fonctions définies par

$$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{x+1}-1 \qquad \text{et} \qquad g(x)=e^{x}-(e-2)x-1$$





Comme dans le dernier TP, on considère que ces *courbes de Lorentz* représentent la répartition des richesses dans deux pays A et B.

On rappelle que *l'indice de Gini* d'un pays est donné par

$$I=1-2\int_0^1 L(x)\,dx$$

où L est la fonction décrivant sa courbe de Lorenz.

Utilisez la méthode de Riemann pour calculer les indices de Gini des pays A et B.

```
function y=f(x)
    y=
endfunction

N=
A=
B=

S=
for k=    :
    S=
end

disp(S)
```

```
function y=f(x)
    y=
endfunction

N=
A=
B=

S=
for k=    :
    S=
end

disp(S)
```

Partie C : Application au calcul d'intégrales impropres.

Pour tout entier m, on pose $I_n = \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt$.

1. À l'aide de sommes de Riemann, estimer ses premiers termes.

n	1	2	5	10	20	50
I_n						

2. Estimer $I_n = \int_1^{1000} \frac{1}{t^2}\,dt$ avec une somme de Riemann. Quelle précaution faut-il prendre ?

3. Au vu de ces résultats, que pensez-vous de la nature de la suite I_n ?

4. Calculer I_n à l'aide d'une primitive et vérifiez votre affirmation.

On définit donc, lorsque la limite existe $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx$ *et on parle d'« **intégrale impropre** ».*

5. On définit alors $J_n = \int_1^n \frac{1}{t} dt$. Y a-t-il une limite lorsque $n \to \infty$?

6. Étudiez le cas de la suite d'intégrales définie par $K_n = \int_0^n e^{-t^2} dt$.

Si possible, donnez une valeur approchée de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$