Annexe 4 : Tracé de courbes à main levée

1. Courbes des fonctions usuelles

Fonction carrée	Fonction cube
Fonction racine carrée	**Fonction logarithme népérien**
Fonction exponentielle	**Fonction exponentielle négative**

Fonction affine

2. Éléménts méthodologiques, et informations à intégrer

☞ **Domaine de définition** Les abscisses doivent se limiter au domaine définition de f.

☞ **Parité**

Une *fonction paire* a une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Une *fonction impaire* a une courbe symétrique par rapport à l'origine.

☞ **Sens de variation**

Une fonction *croissante* a une courbe qui "monte". Une fonction *décroissante* a une courbe qui "déscend"

☞ **Convexité et points d'inflexion**

Une fonction *convexe* a une courbe "tournée vers le haut". Une fonction *concave* a une courbe "tournée vers le bas"

En un *point d'inflexion*, la tangente devra "traverser" la courbe.

☞ **Tangentes**

Si $f'(a)=0$, la courbe admettra une *tangente horizontale* au point d'abscisse a.

Si des tangentes ont été déterminées, et on veillera à ce que la courbe les "frole".

☞ **Limites et asymptotes**

Dans le cas d'une limite de type $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, on placera une *asymptote horizontale*, passant par y=l

Dans le cas d'une limite de type $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on placera une *asymptote verticale*, passant par x=a

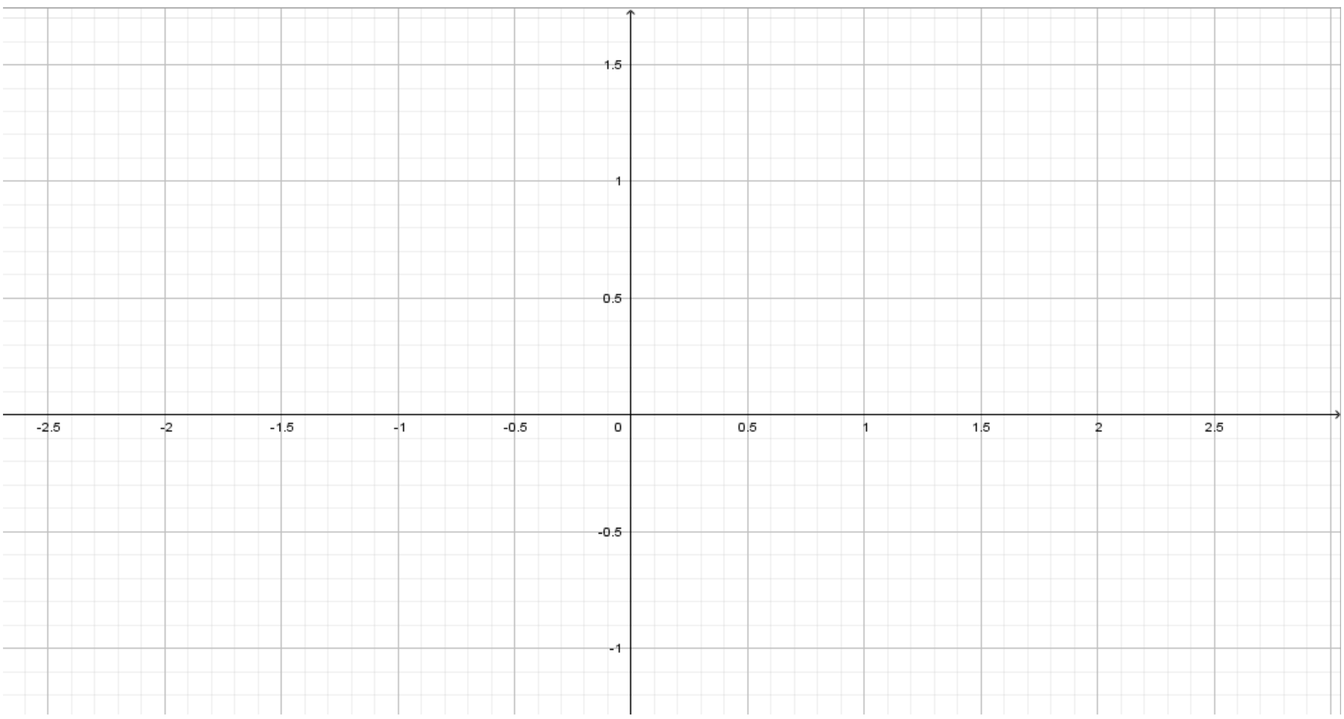
Dans le cas $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on tracera une branche qui monte/déscend arbitrairement haut/bas.

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Tracer la courbe de f à main levée, en admettant les propriétés suivantes **(qu'on n'essayera pas de démontrer)**

- La fonction f est croissante et impaire
- La fonction f est convexe sur $]-\infty ; 0[$, concave sur $]0 ; +\infty[$ et admet un point d'inflexion en 0.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation (y = x)



Exercice 2 *Extrait d'EMLyon 2018*

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

PARTIE III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{\big(x - \ln(x)\big)\big(2x - \ln(2x)\big)}.$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0\,;+\infty[$.

10. Montrer : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.$

11. a. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b. Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

En admettant que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a $x - \ln(x) > 0$, et en traitent seulement la question 9 (variations).

Essayez de tracer la courbe (question 12) en prenant les informations nécessaires dans l'énoncé.