Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

<u>Semaine 2 : Convergence, continuité, dérivabilité, équations différentielles.</u>

Exercice 1

Soit l'équation $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.

2. Justifier que $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et montrer que β vérifie $\frac{\beta^3 + 1}{3} = \beta$

3. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$.

   a) Dresser le tableau de variations de g.

   b) Justifier que $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow g(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

   c) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

4. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.

   c) En déduire que la suite u converge vers β.

5. a) Trouver une valeur de n pour laquelle $|u_n - \beta| \leq 10^{-9}$.

   b) Ecrire un programme Python qui renvoie une valeur approchée de β à 10^{-9} près.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

1. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$, et montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$.

2. a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=1+\dfrac{2}{e^{2x}-1}$.

   b) En déduire le limite de f en $+\infty$

   c) Déterminer la limite de la fonction f en 0 (par valeurs supérieures).

3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

   Déterminer le signe de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

4. a) Justifier la dérivabilité de la fonction g définie par: $g(x)=\ln\left(e^{2x}-1\right)-x$ et calculer g'(x)..

   b) En déduire une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

   c) Déterminer le sens de variation de g et sa limite en 0 par valeur supérieure.

   d) En écrivant $e^{2x}-1=e^{2x}(1-e^{-2x})$, déterminer la limite de g en $+\infty$.

   e) Montrer que l'équation g(x) = 0 a une unique solution sur $]0\,;+\infty[$

5. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(-x)=f(x)$.

   En déduire une symétrie de la courbe représentative de f, qu'on notera C.

6. Calculer $f(\ln(3))$ et $f'(\ln(3))$.

7. Dessiner la courbe représentative de la fonction f.

   On donne les valeurs approchées :

$\ln(3)$	$5/4$	$9/16$	$9/32$
$1,1$	$1,2$	$0,6$	$0,3$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y''+2y'+y=1+2e^{-3t}$$

1. Montrer que les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les combinaisons linéaires des fonctions $t\mapsto e^{-t}$ et $t\mapsto te^{-t}$.
2. Déterminer un nombre réel a de sorte que la fonction $h(t)=ae^{-3t}$ soit solution particulière de l'équation différentielle
$$y''+2y'+y=2e^{-3t}$$
3. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle
$$y''+2y'+y=1$$
4. En déduire l'ensemble solution de (E).
5. Déterminer la limite, lorsque t tend vers $+\infty$, des solutions de (E).

Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

Semaine 3 : Systèmes, Matrices, Espaces vectoriels, Applications linéaires

Exercice 4

On considère la matrice $K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ et on essaye de déterminer l'ensemble des matrices M carrées d'ordre 3

vérifiant $K\times M=M\times K=M$

1. Trouver une matrice M simple qui vérifie clairement cette relation.

2. Montrer qu'une matrice $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ vérifie $K\times M=M\times K=M$ si et seulement si $i=g=c=a$, $h=b$ et $f=d$.

3. En déduire que M est alors de la forme $M=\begin{pmatrix}a&b&a\\d&e&d\\a&b&a\end{pmatrix}$ où a,b,e,d sont des nombres réels.

4. Soit F l'ensemble des matrices $M\in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $K\times M=M\times K=M$.

   a) En utilisant la question 3, montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

   On pourra décomposer la forme trouvée convenablement en combinaison linéaire.

   b) Déterminer une base et la dimension de F.

   On pourra s'intéresser aux matrices qui interviennent dans la décomposition de la question 4.a)

Exercice 5

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}2x+y+z=-5\\2x+13y-7z=-1\\x-y+z=1\end{cases}$$

2. Résoudre le système $\begin{cases}4x+3y-5z=a\\2x-y+z=b\\-3x-y+2z=c\end{cases}$, où a, b et c sont des nombres réels donnés.

   On pourra exprimer les solutions en fonction de a, b et c.

3. Soit k un nombre réel donné. On considère alors le système

$$\begin{cases}x-y+z=0\\kx+8y+2z=0\\2x+ky+z=0\end{cases}$$

Pour quelles valeurs de k ce système est-il de Cramer ?

Exercice 6

On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x;y;z)=(x+y-z;2x+y-3z;3x+2y-4z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau Ker(f) et préciser sa dimension.
3. Déterminer l'image Im(f) et préciser sa dimension.
4. Vérifier le théorème du rang.
5. Est-ce que f est injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de taille 3.

1. a) Calculer $A^2 - 4A + 3I$
   b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que pour tout entier n, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.
3. a) Montrer que, pour tout entier n, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$
   b) En déduire la valeur de a_n puis de b_n en fonction de n.
   c) Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

Semaine 4 : Séries et intégrales

Exercice 8

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Calculer I_1 .

2. a) Justifier que $\forall t \in [0,1], 0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$.

   b) En déduire un encadrement de I_n .

3. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

4. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \geq 1, J_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.

   b) En déduire que la suite (J_n) est convergente et donner sa limite..

   c) Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} (n \times J_n)$

Exercice 9

On considère la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1. Soit k un entier naturel non nul. Montrer que, pour $x \in [k, k+1]$ on a $\frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{k^3}$

2. En déduire que $\frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^3} dx \leq \frac{1}{k^3}$.

3. En sommant l'encadrement précédent, montrer que $\int_1^{n+1} \frac{1}{x^3} dx \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} dx$.

4. En déduire que la suite (u_n) est majorée, et donner un majorant.

5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

6. Justifier la convergence de la suite (u_n) , et que sa limite L vérifie $\frac{1}{2} \leq L \leq \frac{3}{2}$.

Devoir des vacances.

Passage CPGE1 - CPGE2

Semaine 5 : Probabilités, Variables aléatoires discrètes.

Exercice 10

On considère deux urnes :

- une urne verte contenant une boule rouge et trois boules vertes,
- une urne rouge contenant deux boules rouges et deux boules vertes.

On effectue une suite de tirages avec remise, de la façon suivante :

- le premier tirage est effectué dans l'urne verte.
- à partir du second, ils sont effectués dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au tirage précedent.

Pour tout entier n non nul, on notera :

V_n : "tirer une boule verte au n-ième tirage", R_n : "tirer une boule rouge au n-ième tirage"

$$v_n = P(v_n) \quad \text{et} \quad r_n = P(R_n)$$

Partie 1 : Deux premiers tirages

1. Si le premier tirage a donné une boule rouge, quelle est la probabilité d'obtenir alors une boule verte au second tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?
3. On a obtenu une boule verte au second tirage.
   Quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge ?

Partie 2 : Trois premiers tirages

Déterminer la probabilité d'obtenir :

4. La première boule verte au troisième tirage.
5. La première boule rouge au troisième tirage.
6. Au moins une boule verte au cours des trois premiers tirages.
7. Une seule boule rouge au cours des trois premiers tirages.

Partie 3 : Le n-ième tirage

8. Pour tout entier n non nul, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et r_n .
9. En déduire que $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n + \frac{1}{2}$ puis l'expression de v_n en fonction de n.

Partie 4 : La première rouge

Soit X le rang d'apparition de la première boule rouge.

10. Pour tout entier n non nul, décomposer l'événement $(X=n)$ en fonction des événements $V_1, V_2, \dots, V_n, R_1, \dots, R_n$ et en déduire la loi de X.
    <u>Attention :</u> *ne concluez pas trop vite. Sommes nous réellement dans un schéma de Bernoulli ?*
11. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 11

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance une pièce 3 fois et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu. En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien.

La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à 2/3, et celle d'obtenir Face est de 1/3. On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Enfn, on notera A l'événement : *"le joueur est déclaré vainqueur "* et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que $P(A)=\frac{13}{27}$.
2. Montrer que G(Ω) = { - 30 , - 10 , 0 , 20 } puis expliciter la loi de G.
3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 12

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées 0, 1, 2, , 100, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts. L'objectif de cet exercice est de déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1.
2. On appelle Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Reconnaître la loi de probabilité de Y_n puis déterminer son espérance ainsi que sa variance.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n et n.
4. En déduire les valeurs de $E(X_n)$ et de $V(X_n)$.