

Feuille d'exercices 1 : Rappels et compléments

Exercice 1. *Développer et factoriser.*

Soit x un nombre réel.

1. Développer :

$$A = (x-2)(2x+5) - (x-2)^2, \quad B = (x^2 - 2x + 3)^2$$

$$\text{et } C = (x+1)^3 - 2(4x-1)^3$$

2. Factoriser :

$$A = (2x-1)^3 - (2x-1), \quad B = (2x+1)^2 - 2(4x^2-1), \quad C = 16 - x^2 - 2(x-4)^2$$

$$\text{et } D = 2x^3 - 2.$$

Exercice 2. *Simplification de fractions.*

Simplifier :

$$A = \frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{3}{2}; \quad B = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} + \frac{2}{5}; \quad C = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{5} - \frac{3}{2};$$

$$D = \frac{3}{4} \times \left(\frac{7}{2} - \frac{8}{3}\right); \quad E = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad F = 3 + \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{5}}$$

Exercice 3. *Puissances.*

Soit n un entier naturel. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+1}, \quad B = (-1)^{n-1} + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2},$$

$$C = -8 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 6 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \quad D = 6^n \left[4 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$$

$$E = \frac{10^{n+1} - 9 \times 10^n - 10^{n+2}}{20 \times 10^{n-2} + 8 \times 10^{n-1} - 10^{n+1}} \quad \text{et} \quad F = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5} \times \left(-\frac{4}{5}\right)^7}{\left(\frac{16}{25}\right)^3 \times \left(-\frac{9}{7}\right)^8} \times \left(\frac{49}{27}\right)^{-4}$$

Exercice 4. *Puissances.*

Pour tout entier naturel n , on pose

$$A_n = \frac{(9^{n+1} - 9^n)^2}{(3^{n+1} - 3^n)^4}$$

1. Calculer A_0 et A_1 , puis conjecturer un résultat.
2. Démontrer la conjecture.

Exercice 5. *Puissances, racine carrée (plus difficile).*

Simplifier :

$$A = 1 - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}} \times \frac{1 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}\right)}; \quad B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \times \left(1 - \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}\right)^4}{\left(\frac{9}{7}\right)^{-3}} \times \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^3;$$

$$C = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Exercice 6. *Racine carrée.*

Simplifier :

$$A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 5\sqrt{54}; \quad B = \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}\right)^2; \quad C = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}} + \frac{3}{\sqrt{3+\sqrt{2}}};$$

$$D = \frac{3\sqrt{5+\sqrt{20}}}{\sqrt{45}\left(2-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}\right)}; \quad E = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}; \quad F = \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}; \quad H = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$$

(x désigne un nombre réel)

Exercice 7. *Racine carrée et fractions.*

Simplifier :

$$A = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}; \quad B = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}; \quad C = \frac{1+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad D = \sqrt{3} \left(\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right).$$

Exercice 8. *Racine carrée, équations.*

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x :

1. $\sqrt{x-4} = 2$
2. $\sqrt{6x+19} = 3x+1$
3. $x-2 = \sqrt{x}$
4. $\sqrt{x^2+9} = 5$
5. $\sqrt{4x^2-4x+1} = 5$

Exercice 9. *Équations.*

Résoudre les équations suivantes :

1. $(x+1)(2x-5)(6x+2) = 0$
2. $\frac{x+1}{x-1} = x$
3. $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$
4. $x^2 - 2x + 1 = 0$
5. $-x^2 - 5x + 1 = 0$
6. $7x^2 - \frac{7}{3}x = 0$

Feuille d'exercices 1 : Rappels et compléments

Exercice 10. *Équations à paramètre.*

Soit m un nombre réel.

Discuter, suivant la valeur de m , les solutions des équations suivantes, d'inconnue x :

1. $9x + 8 = 3m + x$

2. $\frac{m+3}{x} = 6$

3. $(m + 1)x + 8 = 3$

4. $x^2 + mx - 2 = 0$

5. $mx^2 + x - m = 0$

6. $x^2 - mx - (m + 1) = 0$

Exercice 11. *Équation avec exp.*

1. Montrer que pour tout nombre réel x , $e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$

2. Trouver un cas d'égalité.

Exercice 12. *Exponentielle, ln, équations.*

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x :

1. $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$

2. $2 \ln(x + 1) + \ln x = 3 \ln(x - 2)$

3. $e^{-2+\ln x} = 3$

4. $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$

5. $2^{x+1} - 3^x = 5 \times 3^{x-1} - 4 \times 2^x$

Exercice 13. *Exponentielle, équation.*

1. Trouver trois nombres réels a , b et c tels que, pour tout réel x :

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

2. En déduire les solutions des équations suivantes, d'inconnue x :

(a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

(b) $e^{2x} + 4e^x + 1 - 6e^{-x} = 0$

Exercice 14. *Logarithme Népérien, équation.*

1. Trouver trois nombres a , b et c tels que, pour tout réel x :

$$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2 = (x + 1)^2(x + 2)(ax^2 + bx + c)$$

2. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(\ln x)^5 + 5(\ln x)^4 + 10(\ln x)^3 + 11(\ln x)^2 + 7 \ln x + 2 > 0$$