Feuille d'exercices 4 : Ensembles

Exercice 1. *Application directe d'opérations ensemblistes.*
On considère l'ensemble $E = [\![1;9]\!]$ et les parties suivantes :
$A = \{1;2;4;5;8\}$, $B = \{1;3;4;6;7;9\}$, $C = \{2;3\}$ et $D = \{1;6;8\}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $C \cap D$, $C \cup D$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$,
$(A \cup B) \cap (C \cup D)$, $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $A \cap \overline{C}$, $\overline{A}$, $D \cup (\overline{B} \cap A)$ et $B \cap \overline{C}$.

Exercice 2. *Union et intersection identiques.*
Montrer que $A \cup B = A \cap B$ équivaut à $A = B$.

Exercice 3. *Contre-exemples.*
Exhiber des exemples pour illustrer les deux affirmations suivantes :

1. Sous l'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on ne peut pas conclure $B = C$.
2. Sous l'hypothèse $A \cap B = A \cap C$, on ne peut pas conclure $B = C$.

Exercice 4. *Simplifications ensemblistes.*
Simplifier les expression suivantes :

1. $A \cap (\overline{A} \cup B)$
2. $A \cup (\overline{A} \cap B)$
3. $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)$
4. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

Exercice 5. *Une équivalence.*
Soient A, B et C trois ensembles.
Montrer que $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

Exercice 6. *Différence ensembliste.*
La différence ensembliste, notée $A \setminus B$, est définie par

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

1. Déterminer $A \setminus A$ et $A \setminus \emptyset$.
2. Démontrer que $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.
3. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ calculer $\{1, 3, 5, 7\} \setminus \{3, 7, 8\}$

Exercice 7. *Différence symétrique.*
La différence symétrique, notée $A \Delta B$, est définie par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$.
2. Démontrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ calculer $\{1, 3, 5, 7\} \, \Delta \, \{3, 7, 8\}$.

Exercice 8. *Égalité d'ensembles.*
On considère deux ensembles A et B et on suppose qu'il existe un troisième ensemble X tels que :

$$A \cap X = B \cap X \text{ et } A \cup X = B \cup X$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 9. *Formules de De Morgan Généralisées.*
On considère une suite d'ensembles $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

1. Démontrer, par récurrence, la formule de De Morgan généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

2. En déduire, sans récurrence, la formule de De Morgan généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

Exercice 10. *Tirages et dénombrement.*
Dans une association de 12 hommes et 8 femmes, on crée un comité Hygiène et Sécurité, composé de 3 personnes.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y a-t-il de comités sachant qu'au moins une des personnes doit être une femme ?

Exercice 11. *Tirages et dénombrement.*
Un sac contient dix jetons numérotés de 1 à 10. On pioche simultanément 4 jetons dans le sac.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?

2. Parmi ces tirages, combien :

(a) ne comportent que des numéros pairs ?

(b) ne comportent que des numéros impairs ?

(c) comportent au moins un numéro pair ?

Exercice 12.

1. (a) On considère un groupe de 3 hommes et 3 femmes.
Combien peut-on former de couples avec ces personnes ?

(b) Combien peut-on former de couples avec un groupe de 8 hommes et 5 femmes ?

2. Dans l'émission de téléréalite *« Les 10 couples parfaits »* on considère un groupe de 10 hommes et 10 femmes. Des psychologues ont déterminé ce groupe est en réalité formé de 10 couples parfaits, mais les candidats les ignorent qui est leur conjoint idéal.
À chaque cérémonie, les doivent proposer un ensemble de 10 couples.
La présentatrice leur indique alors combien de couples parfaits ont été trouvés.
Selon l'émission, il y a au moins 200 combinaisons possibles. Qu'en pensez-vous ?

3. *Question optionnelle :* Combien peut-on former de couples, sachant que 2 candidats ont trouvé leur « match » ?

Exercice 13. *Développement.*
Soit x un nombre réel. Développer (et simplifier) :

$$(1+x)^3 \ , \ (1-x)^3 \ , \ (1+\sqrt{2})^4 \text{ et } (3-\sqrt{5})^5$$

Exercice 14. *Calcul de sommes.*
Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \ , \ B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \ , \ C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \ ,$$

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } E_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^n.$$

Exercice 15. *d'après HEC.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0, k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k}$.

Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$, puis donner la valeur de S_n et T_n .