Feuille d'exercices 2 : Sommes et produits

Exercice 1. *Recherche de formules pour une suite donnée.*
Pour chacune des suites suivantes :
- conjecturez les quatre termes suivants,
- calculez le vingtième terme de la suite,
- donner une formule qui permet de calculer directement la n-ième valeur.

(a) 1 4 9 16 ... ...
(b) 1 3 9 27 ... ...
(c) 0 3 8 15 ... ...
(d) 100 20 4 0,8 ... ...
(e) $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$ ... ...
(f) 4 6 8 10 ... ...

Exercice 2. *Utilisation des symboles $\sum$ et $\prod$.*
Écrire les formules suivantes avec le symboles $\sum$ ou $\prod$:

$A=2+4+6+8+10+12$; $B=1+3+5+7+9+11$; $C=1-2+3-4+5-6+7-8+9-10$;

$D=1+3+5+7+9+...+(2n-1)$; $E=1^5+2^5+3^5+...+51^5$; $F=\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\frac{a^4}{4}+...+\frac{a^n}{n}$;

$G=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{4}\times\dfrac{7}{6}\times...\times\dfrac{11}{10}$; $H=\left(1+\frac{1}{10}\right)\times\left(1+\frac{2}{10}\right)\times...\times\left(1+\frac{10}{10}\right)$.

Dans toutes ces sommes, n désigne un entier naturel non nul et a un nombre réel.

Exercice 3. *Calcul de sommes.*
Calculer les sommes suivantes, en fonction de n :

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}(5k+1)\ ;\ B_n=\sum_{k=0}^{n}(4k^2-4k+2)\ ;\ C_n=\sum_{k=0}^{n}(6k^2-2k+1)\ ;$$

$$D_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k\ ;\ E_n=\sum_{k=0}^{n}(2^k+3^{2k})\ ;\ F_n=\sum_{k=0}^{n}(k^2-6\times 2^k)\ ;$$

$$G_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+3}}{3^{k+1}}\right)\ ;\ H_n=\sum_{k=2}^{2n}(2k+1)\ ;\ I_n=\sum_{k=n}^{n+2}2.$$

Exercice 4. *Démonstration de la formule sommant les carrés.*
Dans cet exercice, nous allons démontrer la formule permettant de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$.

Pour cela, nous utiliserons seulement la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Développer et simplifier $(k+1)^3-k^3$.

2. Calculer la somme $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3$ de deux manières :

(a) En utilisant la formule de la question 1.
(b) En utilisant un téléscopage.

3. À l'aide de la question précédente, retrouver la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5. *Somme télescopique.*

1. Montrer que, pour tout entier relatif $k\geq 1$: $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ en fonction de l'entier n.

Exercice 6. *Sommes doubles.*
Calculer les sommes doubles suivantes :

$$A_n=\sum_{1\leq i,j\leq n}1\ ;\ B_n=\sum_{1\leq i,j\leq n}j\ ;\ C_n=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j}\ ;\ D_n=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}1 \text{ et } F_n=\sum_{1\leq i<j\leq n}1$$

Exercice 7. *Calcul de produits.*
Calculer les produits suivants :

$$A_n=\prod_{k=1}^{n}2^k\ ;\ B_n=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k^2}\ ;\ C_n=\prod_{k=1}^{n}e^{2k-1}\ ;$$

$$D_n=\prod_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{4}{k}\ ;\ E_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) \text{ et } F_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}.$$