Feuille d'exercices 3 : Élements de raisonnement

Exercice 1. *Propositions et de leurs négations : vérification.*

1. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
   $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ $\quad P_2 : \exists x \in \mathbb{R}, 2x - 1 = 12$
   $P_3 : \exists n \in \mathbb{N}, 2n - 1 = 12$ $\quad P_4 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$
   $P_5 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 3n$ $\quad P_6 : \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2p$
   $P_7 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y^2$ $\quad P_8 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y^2$
   $P_9 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y^2$ $\quad P_{10} : \forall x > 0, \exists y > 0, y < x$
2. Écrire la négation de chacune des ces propositions.

Exercice 2. *Propositions et leurs négations : écriture.*

1. Écrire la proposition P qui dit que le carré de tout nombre réel est positif ou nul, ainsi que sa négation.
2. Écrire la proposition suivante :
   « Pour tout rationnel strictement positif,
   il existe un entier strictement plus grand que lui. »
3. Écrire la proposition suivante :
   « quel que soit le réel x, il existe un entier n,
   tel que x soit compris entre n et n +1. »
4. Écrire la négation de la proposition $0 < x \leq 1$.

Exercice 3. *Une implication et sa réciproque.*

1. L'implication $\forall x \in \mathbb{R}, x = x^2 \Rightarrow x \geq 0$ est-elle vraie ?
2. Écrire sa réciproque. Est-elle vraie ?

Exercice 4. *Une implication et sa réciproque.*

1. Montrer que si $x < 1$ alors $(x-4)^2 > 9$.
2. Écrire la réciproque de cette implication. Est-elle vraie ?

Exercice 5. *Démonstration d'une équivalence.*
Démontrer l'équivalence $a = b = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = 0$

Exercice 6. *Condition suffisante/nécessaire.*

1. Donner une condition nécessaire mais non suffisante sur x pour que $x^2 \geq 1$.
2. Donner une condition suffisante mais non nécessaire sur x pour que $x^2 \geq 1$.

Exercice 7. *Raisonnements par récurrences (faciles).*

1. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$.
   Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.
2. On définit la suite (v_n) par : $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$.
   Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.
3. On définit la suite (w_n) par : $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = w_n + 2n + 2$.
   Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $w_n = n(n+1)$.

Exercice 8. *Démonstration de la bornitude d'une suite par récurrence..*
On considère une suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} 0 \leq u_0 \leq 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n}{4+u_n} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 9. *Démonstrations de sommes usuelles par récurrence.*

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 10. *Formule explicite pour une suite d'ordre 2.*
On considère la suite définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 11. *Majoration de la suite de Fibonacci.*
Soit (F_n) la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $F_n \leq 2^n$.

Exercice 12. *Formule explicite pour suite d'ordre 2 non linéaire.*
On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n-1}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{1}{2} v_{n+1} + \frac{1}{2} v_n$.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 13. *Suite cumulée, récurrence forte.*
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer la conjecture par récurrence forte.

Exercice 14. *Disjonction de cas.*
Soit n un entier. Démontrer par disjonction des cas que $n^2 + 3n$ est un entier pair.

Exercice 15. *Disjonction de cas : formule pour le maximum de deux nombres.*
Soient a et b des réels. Démontrer par disjonction des cas que $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$

Exercice 16. *Une implication.*
On considère l'implication $x^3 = 1 \Rightarrow x < 2$.

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. Écrire sa réciproque. Est-elle vraie ?
3. Écrire sa contraposée. Est-elle vraie ?

Exercice 17. *Une implication.*
On considère l'implication $x > 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 > 6$.

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. Écrire sa réciproque. Est-elle vraie ?
3. Écrire sa contraposée. Est-elle vraie ?

Exercice 18. *Raisonnement par contraposée.*
Soient a et b deux nombres réels.

En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que :

$$(a \neq 1 \quad \text{et} \quad b \neq 1) \Rightarrow a + b - ab \neq 1$$

Exercice 19. *Raisonnements par l'absurde.*

1. Montrer par l'absurde que 0 n'est pas solution de l'équation $x^4 + 12x - 1 = 0$.
2. Montrer par l'absurde que l'équation $x^4 - 3x^3 + x^2 - x + \sqrt{2} = 0$ n'admet pas de solution rationnelle.

Exercice 20. *Principe des tiroirs et des chaussettes.*
Démontrer que si vous rangez (n+1) paires de chaussettes dans n tiroirs, alors au moins l'un des tiroirs contient au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 21. *Somme alternée des premiers entiers.*
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$.