Devoir surveillé n°1

Exercice *Suite et intégrale, d'après ECRICOME 2004.*
Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A : Etude de la fonction f

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$
5. Calculer $f'(0)$ et donner l'allure de $\mathcal{C}_f$. *Faire un tracé à main levée.*

Partie B : Calcul de l'intégrale u_0

On considère la fonction réelle F définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

et nous admettrons que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
7. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$
8. En déduire la valeur de l'intégrale u_0.

Partie C : Etude de la suite (u_n).

9. Calculer l'intégrale u_1.
10. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.

    Indication : On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
11. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
12. Montrer que la suite (u_n) est convergente. *On ne cherchera pas sa limite dans cette question.*
13. Justifier l'encadrement suivant :

    $$\forall x \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

    en déduire que :

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$
14. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)