Fiche méthode n°2 – Sommes et produits

<u>Pour écrire une somme ou un produit symbolique en extension :</u>

- Calculer quelques premiers termes

  → *Remplacer les premières valeurs de l'indice dans la formule*
- Laisser des points de suspension.
- Exprimer quelques derniers termes

  → *Remplacer les dernières valeurs de l'indice dans la formule.*

Exemple : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \times k^2 = (-1)^1 \times 1^2 + (-1)^2 \times 2^2 + \ldots + (-1)^n \times n^2$

<u>Pour exprimer une somme ou un produit sous forme symbolique :</u>

- Repérer l'opération et choisir le symbole → *somme : Σ ; produit : Π*
- Trouver une formule qui donne les termes/facteurs en jeu.
- Indiquer les bornes de l'indice de par et d'autre du symbole somme/produit.

<u>Exemple :</u> $A = 2+4+6+8+10$ somme des entiers pairs de 4 à 10.

La formule des nombres pairs est $2k$.

Ainsi $A = \sum_{k=1}^{5} 2k$ en faisant attention aux bornes de k.

<u>Pour calculer une somme symbolique, on peut :</u>

- Effectuer un découpage *en sommes*, et utiliser les *sommes usuelles*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon} \end{cases} .$$

  → *Si la formule ne convient pas : la manipuler avec les règles du Chapitre 1.*

  → *Si l'indice de départ ne convient pas :*

  - *Utiliser la méthode de Juliette : Soustraire les termes manquants...*
  - *Utiliser un changement d'indice afin de «décaler» l'indice de départ.*

- Identifier une somme téléscopique, de la forme $\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$.

  → *Ecrire la somme en extension pour s'en rendre compte, et pour ne pas se tromper !*

<u>Pour calculer un produit formel, on peut :</u>

- Effectuer un découpage en *produits*, et identifier les produits de la forme

$$\prod_{k=1}^{n} a = a^n \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} k = k! \quad .$$

  En cas de besoin, séparer un facteur artificiellement pour y parvenir.

- Utiliser un changement de variable...
- Identifier un produit téléscopique, de la forme $\prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_1}$.

  →*Ne pas hésiter à l'écrire en extension pour repérer les simplifications.*