Devoir surveillé n°1

Les documents, la calculatrice, et tout matériel électronique sont interdits.
Le soin, la précision et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation.

Exercice 1. *Étude d'une suite récurrente.*
À toutes fins utiles, on donne la valeur approchée $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie A : Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) - x.$$

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

2. Dresser le tableau de variations de f, puis indiquez-y les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ que vous justifierez soigneusement.

3. Justifier que $f(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, 1]$ et préciser cette solution.

Partie B : Étude d'une suite.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n^2\right)$.

5. Compléter le programme *Python* suivant pour qu'il calcule et affiche u_n, pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int.input('Entrer la valeur de n')
u=......
for k in range(1,n+1)
   u=......
print(u)
```

6. Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq 1$.

7. En utilisant de la **Partie A**, justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

8. Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

9. En utilisant la méthode du point fixe, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2. *Calculs matriciels.*
On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 4 & -6 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}M + 2I_3$ et $B = \frac{1}{2}M - 2I_3$.

(I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3)

1. Expliciter les matrices A et B, puis calculer $A \times B$, $B \times A$ et $A + B$.

2. Calculer les matrices A^2 et B^2.

3. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a $M^n = 4^{n-1}A + (-4)^{n-1}B$.

4. Montrer que $M^2 = 16I_3$. *Il n'est pas nécessaire de calculer M^2 explicitement.*

5. En déduire que la matrice M est inversible, et donner sa matrice inverse M^{-1}.

6. Déterminer tous les vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant

$$M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On résoudra un système d'inconnues x,y,z et on présentera la solution à l'aide de la notation Vect(...).

Exercice 3. *Différentes lois de probabilités.*

Partie A : Un jeu de dé

On considère un dé équilibré à 10 faces, et un joueur qui lance ce dé.
- S'il obtient un numéro impair, il ne marque aucun point,
- S'il obtient le 2 ou le 4, il marque un point,
- Dans tous les autres cas, il marque 2 points.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.

1. Dresser la loi de probabilités de X.

2. Justifier que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Partie B : Parties de jeu successives

Le joueur effectue des parties successives (supposées indépendantes les unes des autres) du jeu décrit dans la **Partie A**. Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$Z_n = \text{Le joueur marque 0 points lors de la n-ième partie}$$

$$U_n = \text{Le joueur marque 1 point lors de la n-ième partie}$$

$$D_n = \text{Le joueur marque 2 points lors de la n-ième partie}$$

Par exemple, si le joueur effectue 3 lancers et obtient successivement 4 , 7 , 3 , on considère que l'événement

$$U_1 \cap D_2 \cap Z_3$$

est réalisé. On notera que dans ce cas, il obtient un score cumulé de 3 points.

3. En utilisant les événements $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, décrire les événements suivants et calculer leurs probabilités. *On attend des justifications.*

A : « Le joueur n'obtient aucun point en 3 parties. »
B : « Le joueur obtient un seul point en 2 parties. »
C : « Le joueur obtient un total de 2 points en 2 parties. »
D : « Le joueur obtient des points pour la première fois lors de la 4 ^{e} partie. »

Partie C : Répétition du jeu jusqu'à l'obtention de points

Désormais, le joueur joue de façon répétée au jeu décrit dans la **Partie A** jusqu'à ce qu'il obtienne au moins un point. On note T la variable aléatoire égale au nombre de partie effectuées pour que le joueur marque, pour la première fois, au moins un point.

4. Décrire les événements $(T = 1)$, $(T = 2)$ et $(T = 3)$ à l'aide les notations introduites dans la **Partie B**, puis calculer les probabilités de ces événements.

5. De manière générale, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction des $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, et calculer sa probabilité. (k étant un entier naturel non nul)

6. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire T ?
Rappeler son espérance et sa variance.