

Vous pouvez travailler en groupe sur ce devoir

Exercice 1 *Une suite récurrente.*

On considère l'application f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t > 0, f(t) = t^2 - t \ln(t)$$

On admet : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie A : Étude d'une fonction

1. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour $t > 0$.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera la limite de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Partie B : Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n \ln(u_n)$$

5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
7. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
8. On admet que la limite $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ vérifie $\ell = f(\ell)$.
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Indication : On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.
9. Écrire un programme en Scilab qui prend en entrée un nombre N et qui calcule le terme u_N .

Exercice 2 *Une suite implicite.*

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n : x \mapsto x^3 + nx - 1$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, que l'on notera u_n .
2. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1$.
5. En déduire un équivalent simple de u_n .