Feuille d'exercices 3 : Rappels en calcul matriciel

Exercice 1.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$$

On trouvera une suite arithmético-géométrique, et on précisera la valeur de a_0.

2. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1-(-2)^n$$

Exercice 2.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$.

2. En déduire que la matrice A est inversible.

3. Démontrer que pour tout entier n, il existe deux nombres a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A + b_n I_3$$

On donnera les relations de récurrence vérifiées par les suites (a_n) et (b_n).

4. Exprimer le terme général a_n, puis b_n, en fonction de n.

5. En déduire une formule permettant de calculer A^n en fonction de n.

Exercice 3. *Calcul matriciel, d'après HEC 2012.*
On considère un réel $m > 0$ et on définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

.

1. Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire des matrice I_3 et M.

2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, donner M^{-1}.

3. On définit les matrices $A = \frac{1}{3}(I_3 + M)$ et $B = \frac{1}{3}(2\,I_3 - M)$.

(a) Calculer les matrices $A \times B$ et $B \times A$.

(b) Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les matrices A^n et B^n.
Indication : *Calculer A^2 et B^2, conjecturer un formule, puis raisonner par récurrence.*

4. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction des matrices A et B.
Exprimer la matrice M en fonction des matrices A et B, avant de calculer M^n avec une formule du cours.

5. Déterminer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = a_n I_3 + b_n M$$

6. La formule précédente est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 4. *Application de la méthode du pivot de Gauss.*
À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. *Inversibilité d'une matrice à paramètre.*
On considère la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -(2+\lambda) & -2 & -6 \\ 1 & -(1+\lambda) & 1 \\ 1 & 3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

où λ est un nombre réel.
Discuter l'inversibilité de A_λ selon la valeur de λ.

Exercice 6. *Inversibilité d'une matrice à paramètre.*
On considère la matrice

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -(2+\lambda) & 1 \\ 2 & 0 & -(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

où λ est un nombre réel.
Discuter l'inversibilité de B_λ selon la valeur de λ.

Exercice 7. *Changement de base, application au calcul des puissances d'une matrice.*
On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

On considère également les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers la base (u, v, w).
3. Calculer P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.
4. Montrer que la matrice $D = P^{-1} \times A \times P$ est diagonale.
5. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

   et calculer la matrice D^n.
6. En déduire la première ligne de la matrice A^n.