# Feuille d'exercices 1 : Suites, rappels et compléments

**Exercice 1.** *Quelques calculs directs de limites.*
Déterminer les limites des suites suivantes :

$$\begin{array}{lll} a_n = n^{22} - 8n^{21} + 1 & d_n = \sqrt{n^2 - 3n + 4} - n & g_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1 \\ b_n = 3^n - 5^n & e_n = \frac{(-1)^n + 4}{n^2} & h_n = \frac{2^n + 4^n - 5^n}{3^n + 2 \times 5^n} \\ c_n = \frac{(n+2)!}{(2n^2+1) \times n!} & f_n = \frac{2n^3 - n^2 + 5}{1 - n^4} & i_n = \sqrt{n^4 + 1} - n \end{array}$$

**Exercice 2.** *Utilisation d'une suite auxiliaire.*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n + 2$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée. Est-elle majorée ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + n + 3$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est géométrique.
   (b) Exprimer le terme général $v_n$ en fonction de $n$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 6 \times 2^n - n - 3$.

**Exercice 3.** *Utilisation d'une suite auxiliaire, bis.*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ , $u_n$ est bien défini et $u_n \geq 0$.
2. On introduit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{2u_n-1}{u_n+1}$.
   Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner sa raison.
3. Exprimer le terme général $t_n$ en fonction de $n$, puis exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
4. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.

**Exercice 4.** *Une suite sous-géométrique.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et $u_n \geq 0$.
   En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
   Si oui, déterminer sa limite par la méthode du point fixe.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$.
4. Retrouver la limite de la suite $u_n$.

**Exercice 5.** *Étude du comportement selon la valeur initiale.*
On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

**Partie A : Dans cette partie, on suppose que $u_0 = \frac{3}{2}$.**

1. Calculer $u_1$ et $u_2$ sous forme de fraction irréductible.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et justifier sa convergence
4. À l'aide de la méthode du point fixe, déterminer sa limite.

**Partie B : Dans cette partie, on suppose que $u_0 = 3$.**

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$.
3. Montrer que $\forall x \geq 3, x^2 - 2x + 2 \geq x + 2$ et en déduire que $u_{n+1} \geq u_n + 2$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3 + 2n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Proposer un programme Scilab qui prend en entrée un nombre $n$, et qui calcule le terme $u_n$.

**Exercice 6.** *Étude de la convergence à l'aide de l'IAF !(facile).*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(2 + u_n)$.
On définit également la fonction $f$ sur $[0, 2]$ par : $f(x) = \ln(2 + x)$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 2]$, qu'on notera $\alpha$.
2. Dériver la fonction $f$ et montrer que
$$\forall x \in [0, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$
3. Justifier que, pour tout entier $n$,
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$
4. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2$$
5. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

**Exercice 7.** *Négligeabilité.*
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'une des deux suites est négligeable devant l'autre.

1. $u_n = 1$ et $v_n = \frac{1}{n}$.
2. $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = n^2$.
3. $u_n = n^7$ et $v_n = (\ln(n))^8$
4. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{e^n}$.
5. $u_n = n^5 + n + 1$ et $v_n = e^n + 3n^2 + 5$.
6. $u_n = e^{n-1}$ et $v_n = e^{n+1}$.
7. $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3^n}$ et $v_n = \frac{1}{e^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{\ln n}$.

**Exercice 8.** *Équivalent de la série harmonique.*
La *série harmonique* est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Étudier les variations des fonctions définie sur $]0,1[$ par
$$f(x) = \ln(1+x) - x \text{ et } g(x) = \ln(1-x) + x.$$
2. En déduire que $\forall x \in ]0,1[\,, \ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.
3. En déduire que pour tout entier $k \geq 2, \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
4. En déduire l'encadrement pour tout entier $n \geq 2$ :
$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq ln(n) + 1.$$
5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{n}$ et en déduire que $H_n = o(n)$.
6. Trouver un équivalent de $H_n$.

**Exercice 9.** *Équivalents.*

1. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :
   (a) $a_n = (n^2 + n + 3^n)(e^{-n} + 1)$
   (b) $b_n = \frac{\ln(n)+2}{4n+1+3^n}$
   (c) $c_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$
   (d) $d_n = n^2 + n - e^n + \ln(n) + e^n$
   (e) $e_n = \frac{n^3+6n^2+1}{n^4+3n^2-2n+1}$
   (f) $f_n = \frac{n^2(\ln(n+1)-\ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}$
2. En utilisant les équivalents, déterminer les limites de chacune des suites.

**Exercice 10.** *Une suite implicite.*
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - e^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variations de $f$.
2. Montrer que pour tout entier $n$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, qu'on notera $u_n$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > \ln(n)$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$e^{u_n}\left(1 - e^{-2u_n}\right) = n.$$
5. En déduire que $u_n \sim \ln(n)$.
6. Vérifier que pour tout entier naturel n, on a
$$u_n = \ln\left(\frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right).$$
7. Retrouver l'équivalent de $u_n$ en utilisant les équivalents de référence et leurs combinaisons.

**Exercice 11.** *Une suite implicite plus difficile..*
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit la fonction $f_n$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution, qu'on notera $u_n$, et que cette solution est négative.
2. Pour tout nombre réel $x \leq 0$, déterminer le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
3. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En revenant à la définition de $u_n$, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Indication : Supposer, par l'absurde, $l < 0$ et aboutir à une contradiction.
5. En déduire que $u_n \sim -\frac{1}{2n}$.

**Exercice 12.** *ESCP, voie T.*
On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 [\ln(1+t)]^n \, dt$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$
$$0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$$
et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que, pour tout entier n,
$$u_{n+1} = 2\,[\ln(2)]^{n+1} - (n+1)u_n$$
Indication : On pourra procéder par IPP et intégrer 1 en $t+1$.
3. En déduire que pour tout entier naturel $n$
$$(n+1)u_n \leq 2\,[\ln(2)]^{n+1}.$$
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(n+2)u_n \geq 2\,[\ln(2)]^{n+1}$.
6. Montrer que $u_n \sim \frac{2[\ln(2)]^{n+1}}{n}$.

**Exercice 13.** *D'après ESCP, voie T.*
Soit $f$ la fonction définie par $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.
On considère également la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Calculer la fonction dérivée de $f$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$, en précisant les limites aux bornes, et en plaçant 1 et $f(1)$ dans le tableau.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
3. Pour $x \in [0,1]$, montrer que $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel, on a $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}\,|u_n - 1|$.
5. Établir que pour tout entier naturel $n$, $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
6. En déduire que la suite $(u_n)$ converge et donner sa limite.

**Exercice 14.** *Suite implicite, d'après EDHEC.*
Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la fonction $f_n$ sur par
$$\forall x > 0, f_n(x) = x - n\ln(x)$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions. En notant $u_n$ la plus petite de ces solutions et $v_n$ la plus grande, on justifiera que
$$0 < u_n < n < v_n$$
2. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$ ?
3. Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
4. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
En déduire le signe de $f_n(u_n)$ et le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ converge.
En revenant à la définition de $u_n$, encadrer $\ln(u_n)$ et conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

**Exercice 15.** *Suite implicite, d'après HEC.*
On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection strictement croissante de $]0,\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'équation
$$x + \ln(x) = n$$
admet une unique solution qu'on notera $u_n$.
3. Calculer $u_1$. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Pour tout entier $n$ non nul, comparer $f(n)$ et $n$. En déduire que $u_n \leq n$.
   (b) En déduire que $n - \ln(n) \leq u_n$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n}$. Conclure.

**Exercice 16.** *D'après St Cyr 2015.*
On considère une suite $(u_n)$ définie par $u_0 > 2$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$
Étudier le sens de variation et la convergence de cette suite.