Feuille d'exercices 4 : Diagonalisation de matrices carrées

Exercice 1. *Vecteurs propres d'une matrice.*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes

$$U = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que U, V et W sont vecteurs propres de A et donner les valeurs propres associées.

Exercice 2. *Calcul d'un sous-espace propre.*

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que -2 est valeurs propre de la matrice B.
2. Déterminer E_{-2}, le sous-espace propre associé à la valeur propre -2.

Exercice 3. *Recherche astucieuse de valeurs propres, ECRICOME 2018.*

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice-colonne $C \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En déduire une valeur propre de C.
2. Résoudre l'équation $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En déduire une valeur propre de C.
3. Déterminer le rang de la matrice $C - 2I_3$. En déduire une valeur propre de C.

Exercice 4. *Polynôme annulateur.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 + X - 6$ est annulateur de A.
2. En déduire que A possède au maximum deux valeur propres qu'on précisera.

Exercice 5. *Polynôme annulateur, d'après ECRICOME 2018.*

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $B^2 - 7B$.
2. En déduire que les seuls réels susceptibles d'êtres valeurs propres de B sont les réels 3 et 4.
3. Déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres, et préciser leurs dimensions.

Exercice 6. *Calcul de valeurs propres.*
Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. *Calcul de sous-espaces propres.*
Soit A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre l'équation $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et en déduire une valeur propre de A.
2. Calculer le sous-espace propre associé. On en donnera une base et la dimension.

Exercice 8. *Cas particuliers de diagonalisation.*
Répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. Une matrice diagonalisable peut-elle avoir seulement 0 comme valeur propre ?
2. Une matrice diagonalisable peut-elle avoir seulement 1 comme valeur propre ?
3. Une matrice diagonalisable peut-elle avoir une unique valeur propre ?

Exercice 9. *Diagonalisation d'une matrice simple.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et l'exprimer en fonction de A et I_3.
2. En déduire les valeurs propres de A. La matrice A est-elle inversible ?
3. Calculer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10. *Diagonalisabilité.*

On reprend la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ de l'exercice 2, et on rappelle que -2 est valeur propre de B.

1. Montrer que 7 et 13 sont également valeurs propres de B.
2. Justifier que la matrice B est diagonalisable.
3. Diagonaliser la matrice B.

Exercice 11. *Diagonalisations sans indications.*
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 12. *Diagonalisation appliquée au calcul d'une suite imbriquée.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} n \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 2v_n \end{cases}$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

4. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.