Semaine 42 - Sujet A

Cours $P \Rightarrow Q$ réc $Q \Rightarrow P$ contraposé non $Q \Rightarrow$ non P

application : $x + x^3 = x(1+x^2)$ $\quad (x+x^3>0) \Rightarrow (x>0)$

réciproque $x>0 \Rightarrow x+x^3>0$ vrai

contraposé $x<0 \Rightarrow x+x^3<0$ vrai

Exercice 1 $A\setminus B = A\cap\overline{B}$

1. $A\setminus B = \{1;7\}$ $\quad B\setminus A = \{6;8\}$
2. $A\setminus A = A\cap\overline{A} = \emptyset$ et $A\setminus\emptyset = A\cap E = A$
3. $A\setminus B = A\cap\overline{B} = \overline{B}\cap\overline{\overline{A}} = \overline{B}\setminus\overline{A}$
4. $(A\setminus B)\setminus C = (A\cap\overline{B})\setminus C = A\cap\overline{B}\cap\overline{C} = A\cap\overline{B\cup C} = A\setminus(B\cup C)$

Exercice 2

1. $99^3 = (100-1)^3 = 100^3 - 3\times 100^2 + 3\times 100 - 1$
$= 1\,000\,000 - 30\,000 + 300 - 1 = 970299$

2. $(2+\sqrt{2})^4 = (4+4\sqrt{2}+2)^2 = (6+4\sqrt{2})^2 = 36 + 48\sqrt{2} + 32 = 68+48\sqrt{2}$

3. $4\binom{n}{8} = \binom{n}{9} \Leftrightarrow \dfrac{4\,n!}{8!\,(n-8)!} = \dfrac{n!}{9!\,(n-9)!} \Leftrightarrow \dfrac{4\times 9}{n-8} = 1$
$\Leftrightarrow n = 36+8 = 44$

Exercice 3 vrai si $n=0$

$P_n \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2+4n+4\right] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ $\Rightarrow P_{n+1}$

Exercice 4

$$B\begin{pmatrix}0&0&5\\0&0&0\\5&3&7\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&5\\0&0&10\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\h&i&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+2b&2a+b+c&c\\d+2e&2d+e+f&f\\h+2i&2h+i+j&i\end{pmatrix}$$

il vient $b=e=i=0$

d'où $2a+c=0 \quad c=-2a$

$2d+f=0 \quad f=-2d$

$2h+j=0 \quad j=-2h$

$$M = \begin{pmatrix}a&0&-2a\\d&0&-2d\\h&0&-2h\end{pmatrix}$$

Semaine 42. sujet B

Cours $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\,13!} = \frac{15\times 14}{2} = 105$

Exercice 1 : ① $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2} = 210$ tirages

② a) que des pairs : $\binom{5}{4} = 5$ tirages

b) " " impairs $= 5$ tirages

c) au moins un pair : $210 - 5 = 205$ tirages

Exercice 2 ① réciproque $(x \geq 30$ ou $y \geq 30$ ou $z \geq 30) \Rightarrow (x+y+z=90)$

FAUX $(30;0;0)$

contraposé $x<30$ et $y<30$ et $z<30 \Rightarrow x+y+z \neq 90$ VRAI

si la contraposé est vraie l'implication est vraie

② $\frac{a}{a-1} = \frac{b}{b-1} \Rightarrow \frac{a-1}{a} = \frac{b-1}{b} \Rightarrow 1 - \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow a = b$

Exercice 3 $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$ P_0 $u_0 = 2\times 3^0 - 1 = 1$ vrai

$P_n \Rightarrow u_{n+1} = 3\times 2\times 3^n - 1 = 2\times 3^{n+1} - 1 \Rightarrow P_{n+1}$ vrai

Exercice 4 ① $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = A+I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = A$

$B\times C = (A+I)(A-I) = A^2 - A + A - I = A - I = C$

$C\times B = (A-I)(A+I) = A^2 - A + A - I = A - I = C$

$A^{2022} = A\,(!)$ (récurrence immédiate ?)

Semaine 42. sujet C

Cours : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ $\quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

application $C = (1+\sqrt{3})^4 = 1 + 4\sqrt{3} + 18 + 12\sqrt{3} + 9 = 28 + 16\sqrt{3}$

$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^n = 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = 0$

Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} a = c \\ d = a+b \\ a+c = c \\ b+d = c+d \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = c = 0 \\ d = b \end{cases}$ $\quad M \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Exercice 2 (1) $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = \{1, 7, 6, 8\}$

(2) cas général $A \Delta A = \emptyset$ $\quad A \Delta \emptyset = (A \cap E) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) = A$

(3) $A \Delta B = B \Delta A$ car $\cup$ symétrique

$\overline{A} \Delta \overline{B} = (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{B} \cap \overline{\overline{A}}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = A \Delta B$

(4) d'une part $A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})]$

$= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$

d'autre part $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (A \cap B \cap \overline{A \cap C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A \cap B})$

$= [A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C})] \cup [A \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$

$= \underbrace{(A \cap B \cap \overline{A})}_{\emptyset} \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \underbrace{(A \cap C \cap \overline{A})}_{\emptyset} \cup (A \cap C \cap \overline{B})$

(5) $A \Delta B = \emptyset = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \Longleftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $B \cap \overline{A} = \emptyset$

$\Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$

Exercice 3 P_0 ok et $P_n : 0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 3u_n + 4 \leq 16 \Rightarrow P_{n+1}$

Exercice 4 (1) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple

(2) $(N - I)(I + N + N^2) = N + N^2 - I - N - N^2 = -I$

(3) $(AB)^3 = ABABAB = A^3B^3 = 0$ (car $AB = BA$!)

(4) $(A+B)^6 = 0$: on peut isoler A^3 ou B^3 dans chaque terme du développement

Semaine 42. Sujet khalil

Cours $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!\,(k-p)!} - \frac{k!}{(p+1)!\,(k-p-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)! - k!\,(k-p)}{(p+1)!\,(k-p)!} = \frac{k!\,(k+1-k+p)}{(p+1)!\,(k-p)!} \quad \text{D}$$

Exercice 1

(1) $$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} + \binom{p+2}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \cdots$$

$$= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

(2) si $p=1$ $$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

si $p=2$ $$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{6}$$

(3) $$\binom{4}{2} = \sum_{k=1}^{3}\binom{k}{1} = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} = 6$$

1	0		
1	1		
1	2	1	
1	3	3	1

$\binom{4}{2}$

(4) $$3n + \frac{(3n)!}{2!\,(3n-2)!} + \frac{(3n)!}{3!\,(3n-3)!} = 115n$$

$\Leftrightarrow$ $$3n + \frac{3n(3n-1)}{2} + \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6} = 115n$$

$\Leftrightarrow$ $n=0$ ou $6 + 3(3n-1) + (3n-1)(3n-2) = 230$

$\Leftrightarrow$ $n=0$ ou $(3n-1)(3n+1) - 224 = 0$

$\Leftrightarrow$ $n=0$ ou $9n^2 - 225 = 0$ $\Leftrightarrow$ $(3n-15)(3n+15) = 0$ ou $n=0$

$\Leftrightarrow$ $n=0$ ou $n=5$

Sujet khalil

Exercice 2

$$E_1 = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$E_1 = \left[A\cap(B\cup\overline{B})\right]\cup\left[\overline{A}\cap(B\cup\overline{B})\right] = A\cup\overline{A} = E$$

$$E_2 = (A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$$

$$E_2 = \left[A\cup(B\cap\overline{B})\right]\cap\left[\overline{A}\cup(B\cap\overline{B})\right] = A\cap\overline{A} = \emptyset$$

Exercice 3

(1) si $M^2 = T$ alors $MT = MM^2 = M^3 = M^2M = TM$

(2) $MT = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & b+c \\ 0 & e & e+f \\ 0 & h & h+i \end{pmatrix}$ et $TM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$

il vient $b = c = g = d = 0$

$e = e+h$ donc $h = 0$

$e+f = f+i$ donc $e = i$

pas de contrainte sur a

d'où $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

(3) $M^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 2ef \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = T$

il faut $a = 0$

$e = 1$ et $f = \frac{1}{2}$

ou $e = -1$ et $f = -\frac{1}{2}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

par récurrence

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sujet khâgne

Exercice 4

$$S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$$

$$S_n + T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = 0$$

d'où $S_n = T_n = 2^{n-1}$

exercice optionnel 1

a) P_n " $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n+1$ "

P_0 vraie car $u_0 \geqslant 0$ et $u_1 \geqslant 1$

si P_n est vraie alors $u_{n+2} \geqslant 2n+1 \geqslant n+2$ car $n \geqslant 1$

et P_{n+1} est vraie

b) P_n " $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$ "

P_0 vraie car $u_0 u_2 - u_1^2 = 2-1 = 1 = 1^0$

si P_{n-1} est vraie : $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = u_n (u_{n+1} + u_n) - u_{n+1}^2$

$$= u_{n+1}(u_n - u_{n+1}) + u_n^2 = -(u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2) = -(-1)^{n-1}$$

$$= (-1)^n$$

et P_n vraie.

option 2

P_0 vraie

si P_n vraie : $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$= 1 + (n+1)x + nx^2$$

$$\geqslant 1 + (n+1)x \quad P_{n+1} \text{ vraie}$$

option 3

$\Rightarrow$ avec $n=0$ et $n=1$ $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$

$\Leftarrow$ immédiat

Cours $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad \binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{k}$

$$\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \frac{(k+1)!}{(p+1)!\,(k-p)!} - \frac{k!}{(p+1)!\,(k-p-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)! - (k-p)\,k!}{(p+1)!\,(k-p)!} = \frac{[k+1-k+p]\,k!}{(p+1)!\,(k-p)!} = \binom{k}{p}$$

Ex 1 ① $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \underbrace{\binom{p}{p+1}}_{=0 \text{ car } p+1>p}$ par télescopage

② $p=1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $p=2$ on retrouve $\sum k^2$ à [illegible]

③ $\displaystyle\binom{4}{2} = \sum_{k=1}^{3} \binom{k}{1} = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1}$

$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}$ $\binom{4}{2}$

④ On résout $3n + \dfrac{3n(3n-1)}{2} + \dfrac{3n(3n-1)(3n-2)}{6} = 115n$

$18n + 9n(3n-1) + 3n(3n-1)(3n-2) = 690n$

$3n[6 + 3n - 3 + 9n^2 - 6n - 3n + 2 - 230] = 0$

$3n[9n^2 - 225] = 0 \iff n=0$ ou $n=5$ ou $n=-5$ (exclu)

Ex 2 $E_1 = A \cap (B \cup \bar{B}) \cup \bar{A} \cap (B \cup \bar{B})$ en [illegible] par [illegible]

$= A \cap E \cup \bar{A} \cap E = A \cup \bar{A} = E$

En échangeant $\cup$ et $\cap$, E et $\emptyset$ on trouve $E_2 = \emptyset = \bar{E}_1$

Ex 3 ① Si $M^2 = T$ on a $MT = MM^2 = M^3$ donc $MT = TM$.

$TM = M^2M = M^3$

[illegible] pour $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $MT = \begin{pmatrix} 0 & b & [illegible] \\ 0 & e & [illegible] \\ 0 & h & [illegible] \end{pmatrix}$ $\quad MT = TM \Rightarrow \begin{cases} a=0 & g=0 \\ c=0 & i=e \\ d=0 & \\ h=0 & \end{cases}$

$TM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d+g & e+h & [illegible] \\ g & h & i \end{pmatrix}$

② [illegible] la forme de ①: $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & b \\ 0 & e^2 & 2ef \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = T \iff \begin{cases} a = 0 \\ e = \pm 1 \\ f = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$ 2 matrices possibles

[illegible] $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 4 $\begin{cases} S_n + T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \\ S_n - T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} S_n = 2^{n-1} \\ T_n = 2^{n-1} \end{cases}$