SGS - Sujet A

Cours : $A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \dots A}_{n \text{ fois}}$ $\qquad (AB)^n = A^n B^n \Leftrightarrow AB = BA$

Exercice 1 : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K^2$ et $K^3 = 0$ d'où $K^n = 0$ si $n \geq 3$

3) $A = I + K$ d'où 4) $A^n = (I+K)^n = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} K^a I^{n-a}$

$A^n = I + nK + \frac{n(n-1)}{2} K^2$ puisque $KI = IK = K$

5) $A^3 - 3A^2 + 3A = I + 3K + 3K^2 - 3(I + 2K + K^2) + 3(I+K)$

$= I$

6) il vient $A(A^2 - 3A + 3I) = I$ d'où $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

$= I + 2K + K^2 - 3(I+K) + 3I$

$= I - K + K^2$

7) avec la formule

$A^{-1} = I - K + K^2$ valable si $n = -1$.

Exercice 2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}$

il vient $\begin{cases} 2c = 3b \\ 2d = 2a + 3b \\ a + c = d \\ 3b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3}c \\ d = a + c = 2a \\ a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad C = \begin{pmatrix} a & \frac{2}{3}c \\ c & 2a \end{pmatrix}$

Exercice 3 (E) $|2x+1| = |x+3|$

x	$-\infty$ ... -3	-3 ... $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ ... $+\infty$
(E)	$-2x-1 = -x-3$ $x = 2$ NON	$-2x-1 = x+3$ $3x = -4$ $x = -\frac{4}{3}$ oui	$2x+1 = x+3$ $x = 2$ oui

(I) $|x+5| < 3 - 2x$

x	... -5	-5 ...
(I)	$-x-5 < 3-2x$ $x < 8$ oui $S_1 =]-\infty; -5[$	$x+5 < 3-2x$ $x < -\frac{2}{3}$

$S_2 = [-5; -\frac{2}{3}[$

$S =]-\infty; -\frac{2}{3}[$

S45. sujet B

<u>Cours</u> : f impaire si $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
$\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à O

<u>Exercice 1</u> $D_f = \mathbb{R}^*$ symétrique par rapport à 0

et $f(-x) = \dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = -f(x)$

<u>Exercice 2</u>

1)
$$\begin{pmatrix}0&2&4\\0{,}5&0&2\\0{,}25&0{,}5&0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&2&4\\0{,}5&0&2\\0{,}25&0{,}5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&4\\0{,}5&2&2\\0{,}25&0{,}5&2\end{pmatrix}}_{A^2}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&-2&-4\\-0{,}5&0&-2\\-0{,}25&-0{,}5&0\end{pmatrix}}_{-A}+\underbrace{\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}}_{-2I}=\underbrace{0}_{=0}$$

2) $A^2 - A = 2I \iff A \times \frac{1}{2}(A-I) = I$ d'où $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I)$

3) $(S) \iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5&1&2\\1/4&-0{,}5&2\\1/8&1/4&-0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\5/4\\-3/8\end{pmatrix}$

<u>Exercice 4</u> (1) P_0 vraie car $B^0 = I$

$P_n \rightarrow B^{n+1} =$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$2^n + 2n2^{n-1} = (n+1)2^n$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{n+1}&\square\\0&0&2^{n+1}\end{pmatrix} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vraie}$$

(2) $B = M\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} + N\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ avec $MN = NM = 2N$
et $N^2 = 0$

$$B^n = (M+N)^n = M^n + nM^{n-1}N = \begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&2^n\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}1&&\\&2^{n-1}&\\&&2^{n-1}\end{pmatrix}N$$

$=$ même résultat

S45 - Sujet A - suite

Exercice 4

1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

with, above the second and third matrices: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

M^2 $\qquad$ M^3

2) $M \times M^2 = M^3 = I$ donc $M^{-1} = M^2$

3) $M^n = I$ si $n = 3k$

$= M$ si $n = 3k+1$ $\qquad (k \in \mathbb{N})$

$= M^2$ si $n = 3k+2$

S45 - Sujet B - suite

Exercice 5

(E) $\quad 2x = |x-3|\,|x-4|$

x	0 $\qquad\qquad$ 3	3 $\qquad\qquad$ 4	4 $\qquad\qquad$ $+\infty$
(E)	$2x = (3-x)(4-x)$ $x^2 - 9x + 12 = 0$ * $\Delta = 81 - 48 = 33$ $x_1 = \dfrac{9-\sqrt{33}}{2}$	$2x = (x-3)(4-x)$ $x^2 - 5x + 12 = 0$ $\Delta < 0$	$2x = (x-3)(x-4)$ identique à * $x_2 = \dfrac{9+\sqrt{33}}{2}$

Exercice 3

$E_1 \Leftrightarrow 2x+1 = \pm 3 \qquad x = 1$ ou $x = -2$

$E_2 \Leftrightarrow 2x-7 = \pm 3 \qquad x = 5$ ou $x = 2$

(E_3)

x	-1	-1 $\qquad$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	$-2x-1 = -x-1$ $x = 0$ NON	$-2x-1 = x+1$ $x = -\dfrac{2}{3}$ oui	$2x+1 = x+1$ $x = 0$ oui

Semaine 45. Sujet C

Cours A inversible $\iff \det A \ (= ad - bc) \neq 0$

et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Application : $\det M(x) = (3-x)x - 2 = -x^2 + 3x - 2$
$= -(x-1)(x-2)$

$M(x)$ inversible $\iff x \neq 1$ et $x \neq 2$

Exercice 1 $(E_1) \iff x^2 - 8x + 7 = 0 \iff (x-1)(x-7) = 0 \iff x = 1$ ou 7
ou $x^2 - 8x + 15 = 0 \iff (x-3)(x-5) = 0 \iff x = 3$ ou 5

(E_2)

x	$-\infty$ -1	-1 2	2 $+\infty$
(E_2)	$4 - 2x - x - 1 = 3$ $x = 0$ (non)	$4 - 2x + x + 1 = 3$ $x = 2$ (oui)	$2x - 4 + x + 1 = 3$ $x = 2$ (oui)

Exercice 2

(1)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = A + 2I$$

(2) $\frac{1}{2}(A^2 - A) = I$ soit $A \times \frac{1}{2}(A - I) = I$ d'où $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$

(3) récurrence : P_0 : $A^0 = 0 \times A + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right)I = I$ P_0 vraie

hérédité $P_n \Rightarrow A^{n+1} = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^n\right)(A + 2I) + \frac{2}{3}\left((-1)^n + 2^{n-1}\right)A$

$$= \left[\frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{2}{3} \times 2^{n-1}\right]A + \left[\frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3} \times 2^{n+1}\right]I$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{3} \times (-1)^{n+2} + \frac{2}{3} \times 2^n\right]}_{\text{factoriser } \frac{1}{3}}A + \frac{2}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^n\right)I = \text{le résultat}$$

$\Rightarrow P_{n+1}$

S4S. sujet C. suite

Exercice 3

$$S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

d'où $S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ainsi $\begin{cases} 2^x = 1 \\ 3^y = 1 \\ 4^z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 4

1) $P^2 = P$ si P inversible alors $P^2P^{-1} = PP^{-1}$ soit $P = I$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient

2) $Q^2 = (I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P = Q$

3) $PQ = P(I - P) = P - P^2 = 0 = QP$

4) $(I + P)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k I^{n-k} = \underset{(k=0)}{I} + (2^n - 1)P$

puisque $\sum \binom{n}{k} = 2^n$ et $P^k = P$ si $k \neq 0$