

S2. Lj et A

Corr $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

d'ici $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(B)} \times P_A(B)$

Exercice 1

1) $P(2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{20+15+12}{60} = \frac{47}{180}$

2) $P(\text{pair}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{10+15+6}{30} = \frac{31}{90}$

3) $P_2(5 \text{ faces}) = \frac{P(2 \text{ et } 5 \text{ faces})}{P(2)} = \frac{1}{5} : \frac{47}{180} = \frac{180}{5 \times 47} = \frac{180}{235} = \frac{36}{47}$

Exercice 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = -\infty$ (terme de plus haut degré ou factorisation)
de n^3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - 4} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \quad \text{car} \quad r_n = \frac{2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n - \left(\frac{4}{7}\right)^n}{1 - \frac{1}{7^n}}$$

Exercice 3 $f(x) = \ln x - x$; $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

1.2)

x	0	1	$+\infty$
f'		+	0
f			-

$\nearrow -1 \searrow -\infty$
 $-\infty$

d'ici $f(x) < 0$ et $\ln x < x$ si $x > 0$

3) $\ln m < \sqrt{m} \quad (m \geq 2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln m < \sqrt{m} \Leftrightarrow \frac{2}{\ln m} > \frac{1}{\sqrt{m}}$

(si $m \geq 2$ $\ln m$ est positif) $\Leftrightarrow \frac{m}{\ln m} > \frac{1}{2} \sqrt{m}$

4) par comparaison $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\ln(n)} \right) = +\infty$

Exercice 4

Cas 1: A et B indépendants ($P(A) = \frac{1}{8}$ et $P_B(A) = \frac{1}{8}$)

Cas 2: A et B non indépendants ($P(A) = \frac{1}{8}$ et $P_B(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$)

S2. sujet B

Cors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice 1 : indépendance : $P(A)P(B) = P(A \cap B)$

d'où $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 6 \times [P(A \cup B) - P(A) - P(B)] = 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - P(B) \right)$

$\Leftrightarrow 7P(B) = 2 \Leftrightarrow P(B) = \frac{2}{7}$

Exercice 2 : $\lim (u_n) = +\infty$ (venue du plus haut degré
ou factorisation n^4)

$v_n = \frac{-3n^2 + 1}{2n + 7} = \frac{-3n + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n}}$ d'où $\lim (v_n) = -\infty$

$w_n = \frac{\sqrt{7+n} - 3}{n-2} = \frac{7+n-9}{(n-2)(\sqrt{7+n}+3)} = \frac{1}{\sqrt{7+n}+3}$ d'où $\lim (w_n) = 0$

Exercice 3 : $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$)

1) $f'(x) = e^x - x$ $f''(x) = e^x - 1$

2)

x	0	$+\infty$
f''	$+$	$+$
f'	1	$+\infty$

d'où $f' > 0$ sur $[0; +\infty[$

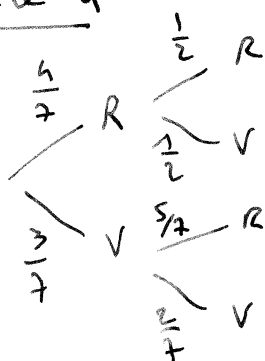
3) f est croissante et $f(0) = 1$
donc f est positive sur $[0; +\infty[$

4) immédiat si $x \geq 0$ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{2}$

5) $x \geq 0$ $e^x \geq \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$

6) par comparaison $\lim \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty$

Exercice 4



(1) $P(2 \text{ vert}) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{49}$

$P(2 \text{ rouge}) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$

(2) $P(\text{au moins un vert}) = \frac{20}{49}$

$P_{\text{acc}}(2R) = \frac{P(2R)}{P(\text{au moins un vert})} = \frac{2}{7} \times \frac{49}{20} = \frac{7}{10}$

(3) $P(\text{au moins un vert}) = \frac{29}{49}$

S2. njet C

cors : $u_n \geq \sqrt{n}$ $\lim(u_n) = +\infty \Rightarrow \lim(u_n) = +\infty$
réciproque fautive

Exercice 1

$$1) P(6) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$2) P_6(\bar{T}) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$3) P_5(\bar{T}) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{6}{40}} = \frac{1}{8} \times \frac{40}{6} = \frac{5}{6}$$

Exercice 2

$f(x) = e^x - x$ $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$ sur $[0; +\infty[$
1.2) donc f est $f(0) = 1$ f est positive
d'où $e^x > x$ sur $[0; +\infty[$ et $(e^x)^2 > x^2$ (fonction croissante)
3) si $x = \frac{1}{2}n$ on obtient $(e^{\frac{n}{2}})^2 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \Leftrightarrow e^n \geq \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow \frac{e^n}{n} \geq \frac{n}{4}$

4) par comparaison $\lim \left(\frac{e^n}{n}\right) = +\infty$

Exercice 3

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

on a $P_n : u_n^2 \geq 2n+1$

(I) : P_0 vraie car $u_0 \geq 2 \times 0 + 1$

$$(H) : P_n \Rightarrow (u_{n+1})^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geq u_n^2 + 2$$
$$\geq 2n+1+2 = 2(n+1)+1 \Rightarrow P_{n+1}$$

donc P_n vraie $\forall n$. Par comparaison $\lim(u_n) = +\infty$
($u_n \geq \sqrt{2n+1}$)

$$\text{Exercice 4} \quad P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{10} = \frac{6}{10}$$

choix de blanc
l'inverse

de même $P(B_2) = \frac{6}{10}$ (tirage avec remise)

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{200} + \frac{25}{200} = \frac{74}{200} = \frac{37}{100}$$

choix de blanc
et blanc
l'inverse

$$\neq P(B_1)P(B_2) = \frac{36}{100} \quad \text{pas indep.}$$

S2. sujet spécial k

Cours A et B indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
ou $P_B(A) = P(A)$

si A et B indép.: $P(A)P(\bar{B}) = P(A) \times (1 - P(B)) = P(A) - P(A \cap B)$
 $= P(A \cap \bar{B}) \quad \square$

Exercice 1 (1) à gauche $x^2 + xy + xz$
à droite $x^2 + xy + xz + zy$ d'où l'inégalité pour des
nombres positifs ou nuls

(2) avec les indications fournies, il vient:

$$\left[P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \right] P(A \cap B) \leq \left[P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \right] \left[P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \right]$$

$$\text{soit } \underbrace{\left[P(B) + P(A \cap \bar{B}) \right]}_{= P(B \cup (A \cap \bar{B}))} P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$$

$$= P(B \cup (A \cap \bar{B})) \text{ car } B \text{ et } A \cap \bar{B} \text{ sont disjoints}$$
$$= P(A \cup B) \quad \square$$

Exercice 2 $f(x) = e^x - x - 1 \quad f'(x) = e^x - 1$

1.2)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \leq e^x$$

3) en appliquant l'inégalité précédente à $(-x)$: $-x+1 \leq e^{-x}$
soit $-xe^x + e^x \leq 1$ d'où $e^x \leq xe^x + 1$

4) d'après (2) $e^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} + 1$ d'où $e^{\frac{1}{n}} - 1 \geq \frac{1}{n}$

d'après (3) $e^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}}$

il vient $1 \leq n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \leq e^{\frac{1}{n}}$ par encadrement $\lim_{n \rightarrow \infty} () = 1$

Exercice 3 $f_n(x) = x^{n+1} + 1 - nx$

1) $f'_n(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1) \leq 0 \quad \text{sur } [0; 1]$

x	0	1
f'_n	$-n$	0
f_n	1	$2-n$

f est bijective de $I = [0; 1]$
sur $J = [2-n; 1]$

2) TVI par les fonctions monotones u_n est tel que $f_n(u_n) = 0$
d'après le tableau de variations $u_2 = 1$

3) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 1 - (n+1)x - x^n - 1 + nx$
 $= x^n(x-1) - x$ négatif (somme de 2 négatifs)

avec $x = u_{n+1}$ il vient $-f_n(u_{n+1}) < 0$
donc $f_n(u_{n+1}) > 0$

b) $\underbrace{f_n(u_{n+1})}_{(+)} > \underbrace{f_n(u_n)}_{=0}$ donc $u_{n+1} < u_n$ car f_n est $\searrow$
 (u_n) est décroissante

4) convergence monotone (minorée par 0)

5) $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} + 1 - 1 > 0$ donc $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$
et $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} + 1 - 2 < 0$ et $\lim f_n = 0$

Exercice 4

1) $\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ tirages possibles

2) $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ tirages avec 2 numéros impairs

3) $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$