# Sujet A. S 50

**Cours** $u_n = u_0 + n r$

**application** $u_n = -4 + 4n$ $\quad u_1 = 40$

$$\sum_{k=0}^{100} u_k = \frac{101 \times (u_0 + u_{100})}{2} = \frac{101\,(-4+396)}{2} = \frac{101 \times 392}{2} =$$

$$= 100 \times 196 + 196 = 19796.$$

**Exercice 1** $\quad P(P) = \frac{1}{2} \quad P(L) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \quad P(P \cap L) = \frac{3}{20}$

$$P(P \cup L) = \frac{10+8-3}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \qquad P(P \cap \bar{L}) = P(P) - P(P \cap L) = \frac{7}{20}$$

$$P(\bar{P} \cap \bar{L}) = P(\overline{P \cup L}) = \frac{1}{4}$$

**Exercice 2** $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$

$s_n = u_n + v_n \quad s_{n+1} = 5u_n + 5v_n = 5 s_n \qquad$ et $\quad s_0 = u_0 + v_0 = 1$

$t_n = 2u_n - v_n \quad t_{n+1} = 4u_n - 2v_n = 2t_n \qquad t_0 = 2u_0 - v_0 = 5$

d'où $\quad s_n = 5^n \quad$ et $\quad t_n = 5 \times 2^n$

$$u_n = \frac{1}{3}(s_n + t_n) = \frac{5^n + 5 \times 2^n}{3}$$

$3 v_n = 2 s_n - t_n \quad$ d'où $\quad v_n = \dfrac{2 \times 5^n - 5 \times 2^n}{3}$

**Exercice 3** ① $u_0 = \frac{1}{2} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} \quad u_1 = \frac{5}{8} \quad u_2 = \frac{89}{128}$

② $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 1$ par récurrence

③ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$ donc $(u_n)$ est $\nearrow$

**Exercice 4** $\quad u_1 = 4 \quad u_2 = 17 \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$

équation caractéristique $\ell^2 = 3\ell + 4 \Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell - 4 = 0 \Leftrightarrow (\ell+1)(\ell-4) = 0$

d'où $\quad u_n = \lambda(-1)^n + \mu 4^n$

il vient $\begin{cases} -\lambda + 4\mu = 4 \\ \lambda + 16\mu = 17 \end{cases}$ soit $\quad \mu = \frac{21}{20}$

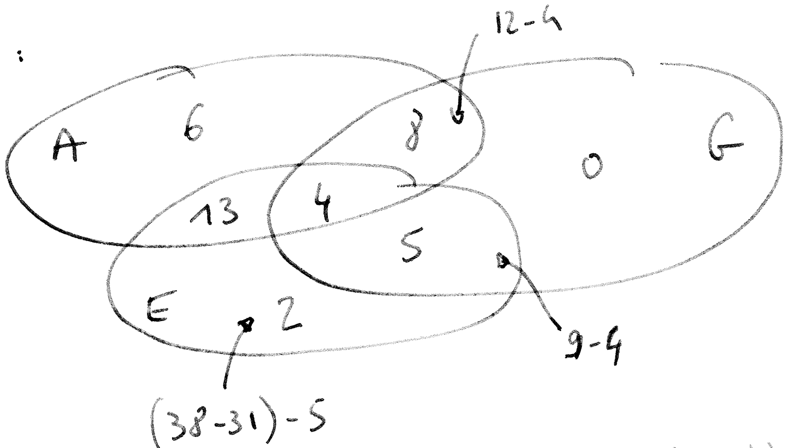
$\lambda = \frac{21}{5} - 4 = \frac{1}{5}$

ainsi $\quad \boxed{u_n = \frac{1}{5} \times (-1)^n + \frac{21}{20} \times 4^n}$

# Sujet B. S50

Cours : $u_n = u_0 \times q^n \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^n = u_0 \, \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exercice 1 :




$P(A \cap E) = \frac{17}{38}$

$P(A \cap \bar{E}) = \frac{14}{38}$

$P(A \cup E) = 1$

$P(L) = \frac{8}{38}$

$L = \left(A \cap (\overline{E \cup G})\right) \cup \left(E \cap (\overline{A \cup G})\right) \cup \left(G \cap (\overline{A \cup E})\right)$

Exercice 2 $\quad u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n$

(1) $u_2 = 10 \quad u_3 = 91 \quad u_4 = 820$

$v_n = u_{n+1} - u_n \qquad v_0 = 1 \quad v_1 = 9 \quad v_2 = 81 \quad v_3 = 729$

(2.3) $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 9(u_{n+1} - u_n) = 9v_n$ et $v_0 = 1$ d'où $v_n = 9^n$

(4) $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_n = u_{n+1} - u_0$ or $S_n = \frac{9^{n+1}-1}{8}$ d'où $u_n = \frac{9^n - 1}{8}$

(5) autre méthode $\ell^2 - 10\ell + 9 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)(\ell - 9) = 0$

$u_n = \lambda \times 1^n + \mu \times 9^n$ avec $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 9\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{8} \\ \lambda = -\frac{1}{8} \end{cases}$

Exercice 3 $\quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases} \qquad u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = \frac{4}{3}$ ni A. ni G.

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \qquad v_{n+1} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{1 - u_n}{4 + 2u_n} = -\frac{1}{2} v_n$

et $v_0 = \frac{2}{5}$ d'où $v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

puis $(u_n + 2)v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} = \frac{2(v_n - 1) + 3}{1 - v_n} = -2 + \frac{3}{1 - v_n}$

$= -2 + \frac{3}{1 - \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

# Sujet C - 550

Cours : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

si A et B incompatibles $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

**Exercice 1** $P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\cap\bar{B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$

donc $P(\bar{A}\cup\bar{B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$

peut s'écrire $P(\overline{A\cap B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$

soit $1 \leq 2\times(1-p)$ si $A\cap B = \emptyset$ d'où $p \leq \frac{1}{2}$

**Exercice 2** $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$

(1) $u_{n+2} = 3u_{n+1} + v_{n+1} = 3u_{n+1} + 2u_n + 4v_n$

$= 3u_{n+1} + 2u_n + 4(u_{n+1} - 3u_n) = 7u_{n+1} - 10u_n$

(2) $\ell^2 - 7\ell + 10 = 0 \Leftrightarrow (\ell-2)(\ell-5) = 0$

$u_n = \lambda 2^n + \mu 5^n$ $\quad$ $\begin{matrix} u_0 = 2 \rightarrow \\ u_1 = 5 \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda + 5\mu = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{3} \\ \mu = \frac{1}{3} \end{cases}$

$u_n = \frac{5}{3}\times 2^n + \frac{1}{3}\times 5^n$ $\quad$ $v_n = \frac{10}{3}\times 2^n + \frac{5}{3}\times 5^n - 5\times 2^n - 5^n$

$v_n = -\frac{5}{3}\times 2^n + \frac{2}{3}\times 5^n$

**Exercice 3** $u_0 = 0$ $\quad u_1 = 1$ $\quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3$

$v_n = u_{n+1} - u_n$

$u_2 = 5$ $\quad u_3 = 12$ $\quad u_4 = 22$ $\quad v_0 = 1$ $\quad v_1 = 4$ $\quad v_2 = 7$ $\quad v_3 = 10$

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n + 3 - u_{n+1} = v_n + 3$

d'où $v_n = 1 + 3n$ $\quad (v_n)$ est croissante.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{(n+1)(1+1+3n)}{2} = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1}$

d'où $u_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

**Exercice 4** $\binom{32}{3}$ tirages $= \frac{32\times 31\times 30}{6} = 32\times 31\times 5 = 160\times 31 = 4960$ tirages

avec 3 valets $\binom{4}{3} = 4$

(2) $P(\text{3 valets}) = \binom{4}{3} : \binom{32}{3} = 4 : \left(\frac{32\times 31\times 30}{6}\right) = \frac{24}{32\times 31\times 30} = \frac{1}{40\times 31} = \frac{1}{1240}$

(3) on compte $\binom{28}{3}$ tirages sans valets $= \frac{28\times 27\times 26}{6} = 14\times 9\times 26 = 126\times 26 = 3276$

$P(\text{sans valet}) = \frac{3276}{4960}$ d'où $P(\text{au moins 1 valet}) = 1 - \frac{3276}{4960} = \frac{1684}{4960}$

(4) $8\times 4 = 32$ tirages avec 3 cartes de la même hauteur

# Spécial K. S 50

Cours : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

application $P(A\cup B\cup C) = P(A\cup B) + P(C) - P[(A\cup B)\cap C]$

$= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

Exercice 1 $u_0 = 0$ $u_{n+1} = 4u_n + 2^{n+1}$ $u_1 = 2$ $u_2 = 12$ ni A ni G

$v_n = \frac{u_n}{2^n}$ $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{4u_n + 2^{n+1}}{2^{n+1}} = 2v_n + 1$

$\ell = 2\ell + 1$ donc $\ell = -1$ $w_n = v_n + 1$ est géométrique

de raison 2 et $w_0 = v_0 + 1 = 1$ soit $w_n = 2^n$

$v_n = 2^n - 1$ et $u_n = 2^n(2^n - 1)$

Exercice 2 $x_0 = 3$ $x_1 = 3$ $2x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n + 2$

(1) $y_n = an^2 + bn + c$ $y_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$ $y_{n+2} = a(n+2)^2 + b(n+2) + c$

(*) devient $2a(n^2+4n+4) + 2b(n+2) + 2c = 3a(n^2+2n+1) + 3b(n+1) + 3c - an^2 - bn - c + 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3a - a \\ 8a + 2b = 6a + 3b - b \\ 8a + 4b + 2c = 3a + 3b + 3c - c + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2a \\ 8a = 6a \\ 4b + 2c = 3b + 2c + 2 \end{cases}$ donc $a = 0$ d'où $b = 2$

la suite $y_n = 2n$ convient.

(2) on pose $u_n = x_n - 2n$ soit $x_n = u_n + 2n$

(*) $2(u_{n+2} + 2n + 4) = 3(u_{n+1} + 2n + 2) - u_n - 2n + 2 \Leftrightarrow 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

$\Leftrightarrow 2u_{n+2} + 4n + 8 = 3u_{n+1} + 6n + 6 - u_n - 2n + 2$

équation caractéristique $2\ell^2 - 3\ell + 1 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)(2\ell - 1) = 0$

d'où $u_n = \lambda + \mu\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda + \frac{\mu}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 4 \end{cases}$

avec $u_0 = x_0 = 3$
$u_1 = x_1 - 2 = 1$

$u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

d'où $x_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 + 2n$

# Spécial K. S50

## Exercice 3 — 5 garçons et 8 filles

1) $\binom{13}{2}$ tirages $= \dfrac{13 \times 12}{2} = 13 \times 6 = 78$ couples

avec 1 fille et 1 garçon : $5 \times 8 = 40$ couples

d'où $P(E) = \dfrac{40}{78} = \dfrac{20}{39}$

2) $365^{13}$ listes de 13 dates

donc $\dfrac{365^{13}}{13!}$ calendriers possibles

et $\binom{365}{13} = \dfrac{365!}{13!\,352!}$ calendriers avec toutes les dates différentes

d'où $P(E) = \dfrac{365!}{365^{13}\,352!} = 0,8$ est la probabilité qu'il n'y ait pas 2 anniversaires le même jour.

## Exercice 4

1) $(x+z)(x+y) = x^2 + xy + xz + yz \geqslant x^2 + xy + xz = x(x+y+z)$

2) avec $x = P(A \cap B)$ ; $y = P(\bar{A} \cap B)$ ; $z = P(A \cap \bar{B})$

il vient $x + y = P(B)$ $\quad x + z = P(A)$

$x + y + z = P(A) + P(\bar{A} \cap B) = P(A \cup B)$

d'où $\quad P(A \cup B)\, P(A \cap B) \leqslant P(A)\, P(B)$