

S48. Lyt A

Cours : $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ homogène $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = h \end{cases}$ triangulaire

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 7y = 0 \end{cases} \text{ homogène et triangulaire}$$

le vecteur nul est toujours solution d'un système homogène.

Exercice 1

$$(S) \begin{cases} x - 4y + 2z = 7 \\ -x + 2y - z = -5 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L2 \leftarrow L1 + L2 \\ L3 \leftarrow L3 + 2L1 \end{array}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 2z = 7 \\ -2y + z = 2 \\ -10y + 6z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 4y - 2z \\ -5y + 3(2 + 2y) = 7 \\ z = 2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Exercice 2

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$$

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x+1)(x-2)$$

x	-2	-1	2	4		
f'		+	0	-	0	+
f	-1		$\frac{9}{2}$		-9	17

(2) TVI : $f(x)=0$
admet exactement 3
solutions dans $[-2; 4]$

(3) $f(x)=2$ exactement 3 solutions (même raisonnement car $\frac{9}{2} > 1$)

(4) $f(x)=-8$ admet exactement 2 solutions.

Exercice 3 (1) CPGE : $4! = 24$ anagrammes

ECONOMIQUE : $\frac{10!}{4!}$ anagrammes (permutation des
O et des E)

$$(2) \binom{20}{4} \text{ unités} = 4845$$

$$\text{avec 1 femme au moins : } \binom{20}{4} - \binom{12}{4} = 4350$$

$$\text{avec 2H+2F } \binom{12}{2} \times \binom{8}{2} = 1848 \quad (3) \frac{1}{2} \times \frac{8!}{4!}$$

Exercice 4 de A vers B : sur les 6 déplacements, 2 vers le haut

$$\text{d'où } \binom{6}{2} = 15 \text{ chemins}$$

$$\text{de B vers C : } \binom{4}{2} = 6 \text{ chemins}$$

$$\text{de A vers C via B } 6 \times 15 = 90 \text{ chemins}$$

S48. Sujet B

Cours $\{1; 2; 3\}$ $\{1; 3; 2\}$ $\{2; 1; 3\}$ $\{2; 3; 1\}$ $\{3; 1; 2\}$ $\{3; 2; 1\}$
en général $n!$ permutations pour n éléments

Exercice 1 $f(x) = \frac{2x^2+1}{4x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{4x(4x^2+1) - 8x(2x^2+1)}{(4x^2+1)^2} = \frac{-4x}{(4x^2+1)^2}$$

f est continue et strictement croissante sur $I = [-1; 0]$

de plus $f(0) = 1$ et $f(-1) = \frac{3}{5}$

donc f est bijective de I vers $[\frac{3}{5}; 1]$

Exercice 2

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 2L1 \end{array} \quad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - z = -7 \\ 12y - 8z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - z = -7 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ z = -8 \end{cases}$$

Exercice 3 ① $\binom{10}{4} = 210$ tirages possibles ② reste 8 jetons $\binom{8}{4} = 70$ tirages

③ $\binom{5}{2} / \binom{5}{2} = \left(\frac{5 \times 4}{2}\right)^2 = 10^2 = 100$ tirages

④ aucun nombre pair $\binom{5}{4} = 5$ tirages donc 205 avec au moins un pair

Exercice 4 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ① $f(-x) = -f(x)$ immédiat

② $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ f est strictement croissante donc injective

③ $f(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$
on résout $x^2 - 2yx - 1 = 0$ (avec $X = e^x$)

$$\Delta = 4y^2 + 4 \quad x_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \quad \text{négligeable}$$

$$x_2 = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{positif}$$

la seule solution est $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

$$\text{d'où } f^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

5h8. Sujet C

Cours : TVI : une fonction continue prend toutes les valeurs de son intervalle image
si de plus la fonction est strictement monotone elle réalise une bijection.

(E) $e^x = x + 2$ soit $f(x) = e^x - x - 2$
on a $f(0) = -1$ et $f(2\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$
 f est continue et 0 appartient à son intervalle image donc
possède un antécédent. De plus $f'(x) = e^x - 1 > 0$
sauf en 0 donc f est strictement croissante. la solution est unique

Exercice 1 (S)
$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x + y - z = b \\ x - 2y + 3z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L2 - 2L1 \\ L3 - L1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ 3y - 3z = b - 2a \\ -y + 2z = c - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + y - z \\ y = \frac{1}{3}(b - 2a + 3z) \\ 3z = b - 2a + 3c - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ y = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + c \\ z = -\frac{5}{3}a + \frac{1}{3}b + c \end{cases}$$

Exercice 2 (1) 4 chiffres différents : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 10 \times 9 \times 56 = 5040$

(2) 3 chiffres utilisés : $3^4 = 81$ codes

(3) $10^3 = 1000$

(4) $\binom{10}{2} \times 2^4 = \frac{10 \times 9}{2} \times 16 = 720$ codes

Exercice 3 (1) $2n+1 = 2n'+1 \Rightarrow n=n'$ donc f est injective
mais pas surjective (2 n'a pas d'antécédent)

(2) f injective ni surjective g surjective bijective i bijective

Exercice 4 $f(x) = e^x + e^{-x}$ (1) $f(-x) = f(x)$ donc f est paire

(2) $f'(x) = e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$ d'où

(3) $f\left(\ln\left(\frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4})\right)\right)$

$$= \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4}) + \frac{1}{\frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4})} = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{y^2 - (y^2 - 4)}$$

$$= \frac{1}{2}(y + \sqrt{}) + \frac{1}{2}(y - \sqrt{}) = y \quad f \text{ est bijective de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } [2; +\infty[$$

et $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4})\right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	2	$+\infty$

Semaine 48. Sujet écrit

cons. f injective si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
 $x \mapsto x^n$ injective si n est impair ; même chose pour $x \mapsto x^{-n}$

Exercice 1

$$(S) \begin{cases} (1-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ x - (1+\lambda)y + 2z = 0 \\ x - y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L2 \leftarrow (1-\lambda)L2 - L1 \\ L3 \leftarrow L3 - L2 \end{matrix} \quad \begin{cases} (1-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ \lambda^2 y - 2\lambda z = 0 \\ \lambda y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

si $\lambda = 0$ (S) $\Leftrightarrow x - y + 2z = 0$ pas de lien

sinon (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ \lambda y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ pas de lien
 $\lambda \neq 2$ sans solution
 $\lambda = 2$ et $x = y = z$

Exercice 2

(1) si $a = b$ l'égalité est vérifiée : infinité de solutions

(2) $a^b = b^a \Leftrightarrow b \ln a = a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$

(3) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ s'annule en 2

x	0	2
f'		+
f		0
		$\frac{1}{2}$
	$-\infty$	0

f est pas injective car non monotone et continue

si $f(a) = f(b)$ et $a < b$ alors $a = 1$ ou $a = 2$

(4) si $a = 1$ alors $a^b = b^1$ donc $b = 1$

si $a = 2$ $\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln 2}{2}$ soit $b = a = 2$

soit $b \in [2; +\infty[$ admet une valeur unique (TVI) et c'est $b = 4$

(5) on aura $|a|^b = |b|^a$ soit $\frac{\ln |a|}{a} = \frac{\ln |b|}{b}$ donc a et b de même signe (logarithmes positifs) ou $f(x) = \frac{\ln |x|}{x}$ est impaire, on ajoutera la solution $a = -2$ et $b = -4$

Exercice 3 : un rectangle = choix de 2 horizontales $\times$ choix de 2 verticales

soit $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 6 \times 6 = 36$ possibilités

avec une grille 3×4 : $\binom{4}{2} \times \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$ possibilités.

Sh8. hpt khali - nite

Exercice 4

① $f(x) = x^2 e^x$ $f'(x) = (x^2 + 2x) e^x$

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc injective

② avec $x > 0$ et $y > 0$

a) $\frac{e^x}{y^2} - \frac{e^y}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 e^x = y^2 e^y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$
et après ①

b) reste $3x^2 = 12x$ soit $x = 4$ puisque $x > 0$