Sujet de colle A

Semaine 42

Question de cours

On considère l'implication $P \Rightarrow Q$.

Donner la réciproque ainsi que la contraposée de cette implication.

Application : On considère l'implication $(x+x^3>0) \Rightarrow (x>0)$

a) Ecrire la réciproque, est-elle vraie ?

b) Ecrire la contraposée, est-elle vraie ?

Exercice 1

Dans un ensemble E, on définit la *différence ensembliste* entre deux parties A et B par

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

1. Dans cette première question seulement on suppose que $A=\{1,3,4,5,7\}$ et $B=\{3,4,5,6,8\}$.

   Calculer $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

2. Déterminer $A \setminus A$ et $A \setminus \emptyset$ dans le cas général.
3. Démontrer que $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.
4. Démontrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 2

1. Calculer 99^3 sans utiliser la calculatrice.
2. Développer et simplifier $(2+\sqrt{2})^4$
3. Déterminer les entiers n vérifiant $4\binom{n}{8}=\binom{n}{9}$

Exercice 3

Montrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} .$$

Exercice 4

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $A \times B$.
2. Déterminer toutes les matrices M carrées d'ordre 3 vérifiant $M \times A = M$

<u>Sujet de colle B</u>

Semaine 42

Question de cours

Donner la formule calculant $\binom{n}{k}$ avec des factorielles.

<u>Application :</u> Calculer la valeur de $\binom{15}{2}$.

Exercice 1

Un sac contient dix jetons numérotés de 1 à 10. On pioche simultanément 4 jetons dans le sac.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?
2. Parmi ces tirages, combien :
   a) ne comportent que des numéros pairs ?
   b) ne comportent que des numéros impairs ?
   c) comportent au moins un numéro pair ?

Exercice 2

1. On considère l'implication $(x+y+z=90) \Rightarrow (x \geq 30 \text{ ou } y \geq 30 \text{ ou } z \geq 30)$
   a) Écrire la réciproque de l'implication. Est-elle vraie ?
   b) Écrire la contraposée de l'implication. Est-elle vraie ?
   c) Est-ce que l'implication $(x+y+z=90) \Rightarrow (x \geq 30 \text{ ou } y \geq 30 \text{ ou } z \geq 30)$ est vraie ?
2. Soient a et b des réels différents de 1. En raisonnant par contraposée, montrer que

$$(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a}{a-1} \neq \frac{b}{b-1}\right)$$

Exercice 3

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 3^n - 1$

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi que $B = A + I_3$ et $C = A - I_3$.

1. Calculer explicitement les matrices B et C.
2. Calculer la matrice $A^2 = A \times A$.
3. Calculer les matrices $B \times C$ et $C \times B$.
4. (optionnel) À votre avis, que vaut la matrice A^{2022} ?

Sujet de colle C

Semaine 42

Question de cours

Énoncez la formule du binôme de Newton, puis donnez le cas particulier de $(a+b)^4$.

Application 1 : Développer et réduire $C=(1+\sqrt{3})^4$.

Application 2 : Calculer la somme $D_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 2^n$.

Exercice 1

1. Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Calculer les matrices $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times A$ et $A\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2. Déterminer toutes les matrices M carrées d'ordre 2 telles que $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times M=M\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 2

Dans un ensemble E, on définit la *différence symétrique* entre deux parties A et B par

$$A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$$

1. Dans cette première question seulement on suppose que $A=\{1,3,4,5,7\}$ et $B=\{3,4,5,6,8\}$.
   Calculer $A\Delta B$.
2. Déterminer $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$ dans le cas général.
3. Démontrer que $A\Delta B=B\Delta A$ et que $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$.
4. Démontrer que $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.
5. Montrer que $A\Delta B=\emptyset$ équivaut à $A=B$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$.

Montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $0\leq u_n\leq 4$.

Exercice 4

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant $M^3=0$.

1. Donner un exemple d'une telle matrice (non nulle si possible)
2. Calculer et simplifier $(M-I_3)(I_3+M+M^3)$
3. Soient A et B des matrices vérifiant $A^3=0$, $B^3=0$ et A B = BA
   a) Montrer que $(AB)^3=0$
   b) Montrer que $(A+B)^6=0$

Sujet spécial Khalil

Semaine 42

Question de cours

Donner la formule calculant $\binom{n}{k}$ avec des factorielles.

Démontrer les formules suivantes : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ et $\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$

Exercice 1

1. En utilisant la deuxième formule ci-dessus, démontrer *la formule de Pascal généralisée* :

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$$

2. En écrivant cette formule pour p=1, qu'obtient-on ? Et pour p=2 ?

3. Expliciter la formule pour calculer $\binom{4}{2}$.

Expliquer pourquoi elle est aussi appelée *formule de la crosse de hockey* (penser au triangle de Pascal)

4. (Optionnel) Déterminer les entiers naturels n vérifiant $\binom{3n}{1}+\binom{3n}{2}+\binom{3n}{3}=115n$

Exercice 2

A et B désignent deux parties d'un même ensemble E.

Simplifier les ensembles suivants :

$$E_1=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}) \qquad E_2=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$$

On pourra trouver une relation simple entre E_1 et E_2 .

Exercice 3

On considère la matrice $T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, et on se propose de rechercher toutes les matrices vérifiant M²=T.

1. Montrer qu'une telle matrice vérifie nécessairement M T = T M

2. Montrer, en utilisant la question 1, que la matrice M est de la forme $M=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&e&f\\0&0&e\end{pmatrix}$

3. En déduire l'ensemble des matrices vérifiant M²=T.

4. (Optionnel) Déterminer T^n par une méthode de votre choix.

Exercice 4 (issu de HEC)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=0,\,k\text{ pair}}^{n}\binom{n}{k}$ et $T_n=\sum_{k=0,\,k\text{ impair}}^{n}\binom{n}{k}$.

Calculer S_n+T_n et S_n-T_n , puis donner la valeur de S_n et T_n .

Exercices optionnels (si quelqu'un termine avant la fin)

1. On considère la *suite de Fibonnaci* définie par $u_0=1$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$

   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n u_{n+2}-u_{n+1}{}^2=(-1)^n$

2. Montrer *l'inégalité de Bernoulli* par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^n \geq 1+nx$$

3. Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0) \Leftrightarrow (a=b=0)$$

4. (très difficile, pour **Khalil**)

   Soient (a_n) et (b_n) des suites de nombres. On pose $A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k$.

   a) Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$ (formule de sommation d'Abel)

   b) En posant $a_k=2^k$ et $b_k=k$, détermine r la formule permettant de calculer $\sum_{k=0}^{n} k2^k$

5. On cherche à déterminer les matrices carrées d'ordre 3 vérifiant $M^2=A$ où $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer qu'une telle matrice vérifia M A = A M

   b) En déduire la forme de la matrice M.

   c) Résoudre M²=A