Sujet de colle A

Semaine 45

Question de cours

Soit A une matrice carrée. Donner la définition de la puissance A^n

A-t-on nécessairement $(A\times B)^n = A^n \times B^n$? *Expliquer.*

Exercice 1

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1. Calculer K^2 et K^3
2. En déduire la matrice K^n pour tout entier $n\geq 3$
3. Exprimer la matrice A en fonction de I_3 (matrice identité d'ordre 3) et K
4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer la matrice A^n en fonction des matrice I_3 , K , K^2 et de l'entier n . *On vérifiera clairement l'hypothèse nécessaire à l'application de cette formule.*
5. Calculer la matrice A^3-3A^2+3A .
6. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1} .
7. La formule établie à la question 4. est-elle valable pour $n=-1$?

Exercice 2

Trouver toutes les matrices C carrées d'ordre 2 telles que $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\times C = C\times\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$.

Exercice 3

Résoudre :

$$(E) : |2x+1|=|x+3| \quad \text{et} \quad (I) : |x+5|<3-2x$$

Exercice 4

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices M^2 et M^3 .
2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse M^{-1} .
3. Déterminer M^n pour tout entier n.

<u>Sujet de colle B</u>

Semaine 45

Question de cours

Donner la définition d'une fonction impaire.

Que peut-on dire de la représentation graphique d'une fonction impaire ?

Exercice 1

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ est impaire.

Exercice 2

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2-A-2I=0$.

2. En déduire que la matrice A est inversible et donner A^{-1} .

3. Écrire le système $(S):\begin{cases} 2y+4z=1 \\ \frac{1}{2}x+2z=0 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases}$ .sous forme matricielle, et résoudre ce système.

Exercice 3

Résoudre les équations :

$$(E_1):|2x+1|=3 \quad , \quad (E_2):\lfloor 2x-7\rfloor=3 \quad \text{et} \quad (E_3):|2x+1|=|x+1|$$

Exercice 4

On considère la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $B^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

2. Retrouver cette réponse en écrivant B = M + N, où la matrice M est diagonale et où N² est nulle, et en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 5 (plus difficile)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-|\,x-3|x-4|\,|$.

Résoudre l'équation f(x)=0

<u>Sujet de colle C</u>

Semaine 45

Question de cours

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres a, b, c et d pour que la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible.

<u>Application :</u> Pour quelles valeurs de x la matrice $M(x)=\begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 1

Résoudre les équations :

$$(E_1)\ :\ |x^2-8x+11|=4 \qquad \text{et} \qquad (E_2)\ :\ |2x-4|+|x+1|=3$$

Exercice 2

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Trouver deux nombres a et b tels que $A^2=aA+bI_3$.
2. Montrer que la matrice A est inversible et donner A^{-1}
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$A^n=\frac{1}{3}\left((-1)^{n+1}+2^n\right)A+\frac{2}{3}\left((-1)^n+2^{n-1}\right)I_3$$

Exercice 3

On considère le système d'équations $\begin{cases} 2^x & +3^x & & =1 \\ 2^x & +3^x & -4^x & =0 \\ -2\times 2^x & -3\times 3^x & +2\times 4^x & =1 \end{cases}$.

1. On pose $X=2^x$, $Y=3^x$ et $Z=4^x$.

   Trouver une matrice A telle que ce système soit équivalent à l'équation $A\times\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer $A\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
3. Déterminer X, Y et Z, puis x, y et z.

Exercice 4 (plus difficile)

Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

1. Montrer que si P est inversible, alors P= I .

   Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à la matrice identité I .
2. Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.
3. Montrer que $P Q = Q P = 0$.
4. Calculer $(I+P)^n$ pour tout entier naturel n.

Sujet de colle spécial Khalil

Semaine 45

Question de cours

Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Application : En décomposant la matrice $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ convenablement, calculer M^n avec la formule du binôme.

Exercice 1

1. Que peut-on dire d'une fonction qui est à la fois paire et impaire ?

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la fonction $a: x \rightarrow \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire.

b) Montrer que la fonction $b: x \rightarrow \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire.

3. En déduire que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

4. Montrer que cette décomposition est unique.

5. Décomposer $f(x)=x^4+2x^3-x^2+5x$ comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Commenter.

Exercice 2

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 9 & -9\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^3=0_{3,3}$.

2. La matrice A^3 étant nulle, on peut définir les matrices $\exp(A)=I_3+A+\frac{1}{2}A^2$ et $\ln(I_3+A)=A-\frac{1}{2}A^2$.

Calculer ces matrices.

3. a) Justifier que $\exp(A)^3=0$ et montrer que $\exp(\ln(I_3+A))=I_3+A$

b) Justifier que $(\exp(A)-I_3)^3=0$ et montrer que $\ln(\exp(A))=A$.

4. On suppose que A B = B A et que $A^3=B^3=0.$

a) Montrer que $(A+B)^6=0$. *On admettra que cela entraîne que $(A+B)^3=0$*

b) En calculant $(A+B)^3$ et $(A+B)^4$, montrer que $A^2B+AB^2=0$ et que $A^2B^2=0$

c) Montrer que $\exp(A+B)=\exp(A)\times\exp(B)$

Exercice 3

On se propose de déterminer les matrices symétriques d'ordre 2 vérifiant $M^2=M$.

1. Est-il possible qu'une telle matrice soit inversible ?

2. Soit $M=\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}$ une matrice répondant au problème.

a) Montrer que $\begin{cases}a^2+b^2=a\\ b(a+d)=b\\ b^2+d^2=d\end{cases}$.

b) Résoudre ce système d'équations dans le cas où $b=0$

c) Dans le cas où $b\neq 0$, justifier que nécessairement $a-a^2\geq 0$ et $a\geq b^2$ puis résoudre le système.

3. Conclure soigneusement : quelles sont les matrices symétriques d'ordre 2 vérifiant $M^2=M$?

Exercices supplémentaires

1. a) Montrer que la fonction définie par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est impaire.

On admettra qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Indication : calculer f(x) + f(-x).

b) Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 , A^3 puis A^n pour tout entier naturel n.

2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Soit A une matrice vérifiant $A^{10}=0$ (matrice nulle).

Calculer et simplifier $(A-I)(I+A+A^2+A^3+\ldots+A^9)$.

Que peut-on en déduire pour la matrice A-I ?

4. Pour occuper Khalil :

a) Déterminer les nombres x pour lesquels $|\ 2x-x^2| = 1$

b) Écrire $A=|\ x-2\,|x-2|\ |$ sans valeur absolue. .