Sujet de colle A

Semaine 48

Question de cours

Donner un exemple de chacun des systèmes suivants : homogène, triangulaire, homogène et triangulaire.

Est-ce qu'un système homogène possède toujours une solution ?

Exercice 1

Résoudre le système d'équations linéaire suivant :

$$(S):\begin{cases} x & -4y & +2z & =7 \\ -x & +2y & -z & =-5 \\ -2x & -2y & +2z & =0 \end{cases}$$

Exercice 2

On considère la fonction définie sur [-2;4] par $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$.

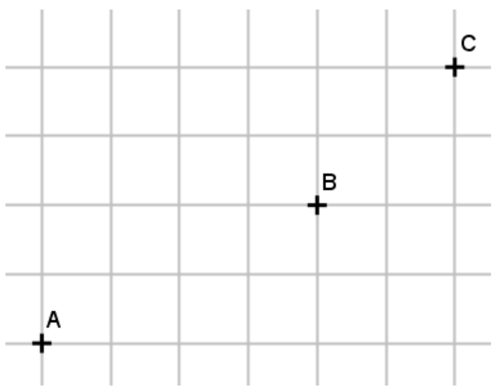
1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur [-2 ; 4].
   On complètera ce tableau avec les valeurs aux extrémités des flèches.
2. Démontrer en détail que l'équation f(x)=0 possède au moins une solution sur [-2 ; 4].
   Combien de solutions il y a-t-il exactement ? *Justifier brièvement.*
3. Combien de solutions admet l'équation f(x)=1 ? *Justifier brièvement.*
4. Trouver un nombre a tel que l'équation f(x) = a admet exactement deux solutions sur [-2;4].

Exercice 3

1. Dénombrer le nombre d'anagrammes du mot CPGE puis du mot ECONOMIQUE.
2. Dans une association de 12 hommes et 8 femmes, on crée un comité Hygiène et Sécurité, composé de 4 personnes.
   a) Combien y a-t-il de comités possibles ?
   b) Combien y a-t-il de comités sachant qu'au moins une des personnes doit être une femme ?
   c) Combien y a-t-il de comités avec une parité parfaite ?
3. Avec les lettres du mot ALPHABET combien peut-on former de mots de 4 lettres ?

Exercice 4 (plus difficile)

Une personne se déplace sur la grille suivante :



Elle suit les arêtes, et se déplace seulement de gauche à droite et de bas en haut.

1. Par combien de chemins peut-elle aller de A vers B ?
   Et de B vers C ?
2. De combien de manières peut-elle aller de A vers C en passant par B ?

<u>Sujet de colle B</u>

Semaine 48

Question de cours

Dresser la liste de toutes les permutations de l'ensemble {1,2,3}.

De façon générale, combien de permutations existe-t-il sur un ensemble à n éléments ?

Exercice 1

On considère la fonction *f* définie sur $I=[-1\,;0]$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{4x^2+1}$.

Démontrez que *f* réalise une bijection de *I* vers un intervalle qu'on précisera.

Exercice 2

Résoudre le système d'équations linéaire suivant :

$$(S):\begin{cases} x & -y & +z & =1 \\ 2x & +y & +z & =-5 \\ 2x & +13y & -7z & =-1 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère un sac contenant dix jetons numérotés de 1 à 10, dans lequel on pioche <u>simultanément</u> quatre jetons.

1. Combien il y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages ne comportent aucun jeton avec un numéro en dessous de 3 ?
3. Combien de tirages sont formés de deux nombres pairs et deux nombres impairs ?
4. Combien de tirages comportent au moins un nombre pair ?

Exercice 4 (plus difficile)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. Montrer que la fonction f est injective.
3. On se propose de montrer que f réalise une surjection sur $\mathbb{R}$.

   Pour cela, on considère $y\in\mathbb{R}$, et on cherche à déterminer un réel x tel que f(x) = y.

   a) Montrer que l'équation f(x)=y revient à $e^x-e^{-x}-2y=0$, puis $(e^x)^2-2ye^x-1=0$.

   b) En posant $X=e^x$, résoudre l'équation $(e^x)^2-2ye^x-1=0$. *Exprimer les solutions en fonction de y .*

   c) Conclure : que peut-on dire de la fonction f ? Donner la fonction réciproque f^{-1} .

Sujet de colle C

Semaine 48

Question de cours

Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Montrer que l'équation $(E): e^x = x+2$ possède une solution sur $[0;2\ln(2)]$. Est-elle unique ?

Exercice 1

Soient a,b et c des nombres réels. Résoudre le système suivant

$$(S):\begin{cases} x & -y & +z & =a \\ 2x & +y & -z & =b \\ x & -2y & +3z & =c \end{cases}.$$

On exprimera les solution en fonction de a,b et c.

Exercice 2

Le coffre-fort d'une banque est protégé par un code à 4 chiffres.

Combien il y a-t-il de codes possibles :

1. Si on suppose que tous les chiffres de la combinaison sont différents ?
2. Si on sait que seuls les chiffres 1, 3 et 7 sont utilisés ?
3. Si on sait que les deux derniers chiffres sont identiques ?
4. **(difficile)** Si on sait que seuls 2 chiffres différents ont été utilisés pour la combinaison ?

Traiter les quatre scénarios indépendamment.

Exercice 3

1. Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ l'application définie par $f(n)=2n+1$.

   Est-ce que *f* est injective ? Surjective ?

2. Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective.

$f:\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2\end{pmatrix}$ $g:\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \to & x^2\end{pmatrix}$ $h:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2\end{pmatrix}$ $i:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \to & x^2\end{pmatrix}$

Justifier brièvement, éventuellement avec un tracé à main levée.

Exercice 4 (plus difficile)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x+e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. On se propose de montrer que l'intervalle image de f est $[2;+\infty[$.

   Soit $y\in[2;+\infty[$. On pose $x=\ln\left(\frac{1}{2}\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)\right)$. Montrer que f(x)=y et conclure.

4. Justifier que f est bijective, et donner l'expression de sa fonction réciproque $f^{-1}(y)$.

<u>Sujet de colle Spécial Khalil</u>

Semaine 48

Question de cours

Donner la définition d'une fonction injective.

Pour quelles valeurs entières de n est-ce que $f(x)=x^n$ définit une fonction injective ? Et $f(x)=x^{-n}$?

Exercice 1

Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles ce système est de Cramer :

$$\begin{cases} (1-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ x - (1+\lambda)y + 2z = 0 \\ x - y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Le but de ce problème est de trouver tous entiers naturels a et b vérifiant $a^b=b^a$

1. Déterminer au moins 5 solutions simples, et expliquer pourquoi il en existe une infinité.

On suppose désormais que a et b sont strictement positifs et différents.

2. Montrer que l'équation $a^b=b^a$ est équivalente à $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$.

3. On se propose donc d'étudier la fonction définie par $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

   a) Étudier les variations de la fonction f, et tracer sa courbe à main levée.

   b) Est-ce que la fonction f est injective ? Que peut-on dire des <u>entiers</u> a et b si $f(a)=f(b)$?

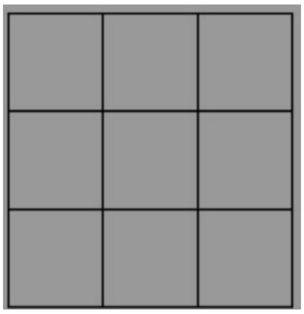
4. Résoudre l'équation $a^b=b^a$ dans le cas où a et b sont positifs. *On distinguera les cas où a=1 et a=2.*

5. **(optionnel, difficile)** Déterminer les entiers relatifs a et b vérifiant $a^b=b^a$

Exercice 3

Combien peut-on dessiner de rectangles dans cette figure, en suivant les lignes ?

Et dans une grille de 3 par 4 ?



Exercice 4

1. Montrer que la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2e^x$ est injective.

2. On se propose de résoudre le système non-linéaire : $\begin{cases} \frac{e^x}{y^2}-\frac{e^y}{x^2}=0 \\ x^2+xy+y^2=12x \end{cases}$ sous les conditions $x>0$ et $y>0$.

   a) Montrer que la première équation équivaut à : $x^2e^x=y^2e^y$, et en déduire que $x=y$.

   b) Conclure, et résoudre le système.

Rapide correction du sujet Khalil

Question de cours

injectif : f(x)=f(y) => x=y, les fonctions mentionnées sont injectives uniquement si n est impair.

Exercice 1

1. Il suffit de prendre a et b identiques, au choix, pour avoir une infinité de solutions.

2. $\ln(a^b)=\ln(b^a)\Leftrightarrow b\ln(a)=a\ln(b)\Leftrightarrow\dfrac{\ln(a)}{a}=\dfrac{\ln(b)}{b}$

3. a) La fonction f est décroissante sur]0, e] puis croissante

   b) Par le tableau, on conclut aisément que f n'est pas injective (continue et non-monotone).

   Si f(a)=f(b) avec a et b entiers, alors a ou b appartient à {1,2}

4. Avec a=1 , on résout $1^b=b^1$ soit b=1.

Avec a=2 , on résout $2^b=b^2$ soit f(b) = f(2). En calculant dans la fonction f, on réalise que $f(3)\neq f(2)$ et que $f(4)=f(2)$ .D'après les variations de f, b=4 est la seule solution.

Les solutions de $a^b=b^a$, sont : soit (a=b) , soit (a=2 et b=4) soit (a=4 et b=2)

5. Si a et b peuvent être négatifs, on passe le tout à la valeur absolue : $|a|^b=|b|^a$ donc $\dfrac{\ln(|a|)}{a}=\dfrac{\ln(|b|)}{b}$ si a et b son non nuls. Ainsi, a et b sont forcément de même signe (car les logarithmes sont positifs).

La fonction $f(x)=\dfrac{\ln(|x|)}{x}$ étant impaire, on peut reprendre le raisonnement précédent : a ou b vaut -2, -1, 1 ou 2.

En étudiant les cas, on obtient les solutions (a=b) , (a=2, b=4),(a=4,b=2),(a=-2,b=-4),(a=-4,b=-2)

Exercice 3

Chaque rectangle est déterminé par 2 ligne horizontales (2 parmi 4 = 6 choix) et 2 lignes verticales (2 parmi 4 = 6 choix).

Il y a donc en tout 6*6=36 rectangles possibles. Dans une grille 3*4, il y a $\binom{5}{2}\times\binom{4}{2}=10*6=60$ choix.

Exercice 4

1. En dérivant, on constate que f est strictement croissante donc injective.

2. a) On passe un terme de chaque coté et on multiplie convenablement.

   b) f étant injective, la première ligne indique que x=y.

   En injectant cela dans la 2e équation, on trouve 3 x² = 12 x donc 3x (x-4)=0 soit x=0 ou x=4