Sujet de colle A

Semaine 50

Question de cours

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Donner la formule permettant de calculer u_n en fonction de r , u_0 et n .

Application :

Si (u_n) est arithmétique et vérifie $u_2=4$ et $u_4=12$, alors combien valent u_{11} et $\sum_{k=0}^{100} u_k$?

Exercice 1

Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 3 s'intéressent à la pêche et à la lecture. On choisit au hasard une personne du groupe, et on note les événements :

P : « La personne s'intéresse à la pêche. », L : « La personne s'intéresse à la lecture. »

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilités, faisant intervenir les événements P et L, ainsi que les opérations usuelles.
2. Calculer $P(P\cup L)$, $P(P\cap \overline{L})$ et $P(\overline{P}\cap \overline{L})$ et décrire ces probabilités à l'oral (au colleur)

Exercice 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=2$, $v_0=-1$ et pour tout entier n :

$$\begin{cases} u_{n+1}=3u_n+v_n \\ v_{n+1}=2u_n+4v_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier n, $\begin{cases} s_n=u_n+v_n \\ t_n=2u_n-v_n \end{cases}$.

1. Identifier les suites s_n et t_n comme étant des suites de référence.
2. Exprimer s_n et t_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère la suite récurrente définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{u_n^2+1}{2}$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n\leq 1$.
3. Montrer que la suite est croissante.

Exercice 4

Exprimer le terme général de la suite définie par :

$$u_1=4, u_2=17, u_{n+2}=3u_{n+1}+4u_n$$

en fonction de n.

<u>Sujet de colle B</u>

Semaine 50

Question de cours

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

Donner la formule permettant de calculer u_n en fonction de q , u_0 et n .

En déduire la formule permettant de calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$

Exercice 1

Parmi les 38 élèves d'une classe, 31 étudient l'anglais, 24 étudient l'espagnol, 17 étudient l'allemand, 12 étudient l'anglais et l'allemand, 9 étudient l'espagnol et l'allemand et 4 étudient les trois langues. On suppose que tout élève de la classe étudie au moins une langue. On choisit un élève au hasard, et on note les événements :

A : « L'élève étudie l'anglais » , E : « L'élève étudie l'espagnol », G : « l'élève étudie l'allemand »

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilités.
2. Calculer les probabilités $P(A\cap E)$, $P(A\cap\overline{E})$ et $P(A\cup E)$
3. Décrire l'événement L :

« L'élève étudie exactement une langue »

à l'aide des événements A, E et G puis calculer sa probabilité.

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=10u_{n+1}-9u_n$.

On pose, pour tout entier n, $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1. Calculer u_2 , u_3 , u_4 et v_0 , v_1 , v_2 puis v_3 .
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.
4. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} v_k$.

 Calculer cette somme de deux façons différentes en en déduire une expression du terme général u_n en fonction de n.

5. Retrouver ce résultat en utilisant la méthode du cours.

Exercice 3

On considère la suite définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite. Est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On pose $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$, en admettant que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\neq-2$

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b) En déduire une expression de v_n , puis de u_n en fonction de n.

<u>Sujet de colle C (sujet plus difficile)</u>

Semaine 50

Question de cours

Rappeler la formule permettant de calculer $P(A \cup B)$ pour des événements A et B donnés.

Que devient-elle si A et B sont incompatibles ?

Exercice 1

Soient A et B des événements.

1. En utilisant la question de cours, justifier que $P(\overline{A} \cup \overline{B}) \leq P(\overline{A}) + P(\overline{B})$

2. En déduire le résultat suivant :

« Si les événements A et B sont équiprobables, de même probabilité p,

et vérifiant $A \cap B = \emptyset$ *, alors nécessairement* $p \leq \frac{1}{2}$ *»*

Exercice 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$ et pour tout entier n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$.

2. En déduire l'expression de u_n , puis de v_n , en fonction de n.

Exercice 3

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3$.

On pose, pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Calculer u_2 , u_3 , u_4 et v_0 , v_1 , v_2 puis v_3 .

2. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique, et préciser sa raison. Quel est son sens de variation ?

3. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.

4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Calculer cette somme de deux façons différentes en en déduire une expression du terme général u_n en fonction de n.

Exercice 4

On tire 3 cartes, une à une et sans remise, dans un jeu de 32 cartes (8 hauteurs dans 4 couleurs).

Faire signe au colleur si on ne connaît pas la composition d'un tel jeu de cartes.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?

2. Combien de tirages comportent 3 valets ?

   En déduire la probabilité de tirer 3 valets.

3. Quelle est la probabilité de tirer au moins 1 valet ?

4. Combien de tirages comportent 3 cartes de la même hauteur ?

Sujet de colle Spécial Khalil

Semaine 50

Question de cours

Rappeler la formule permettant de calculer $P(A \cup B)$ pour des événements A et B donnés.

Application : En appliquant cette formule habilement, trouver la formule permettant de calculer $P(A \cup B \cup C)$

Exercice 1

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 4u_n + 2^{n+1}$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n) . Est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2. On introduit la suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmético-géométrique;

   b) En déduire l'expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n.

Exercice 2

On considère la suite définie par $x_0 = 3$, $x_1 = 3$ et la relation de récurrence : $2x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n + 2$ (*)

Le but de cet exercice est de déterminer une expression explicite de la suite ainsi définie.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c de sorte que la suite définie par $y_n = an^2 + bn + c$ vérifie la relation (*)

2. On pose alors, pour tout entier naturel n, $u_n = x_n - y_n$, où y_n a été déterminé dans la question 1.

   a) Montrer que la suite (u_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2 simple.

   b) Avec la méthode du cours, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

3. Conclure : donner l'expression de x_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère la classe de 1[e] année, formée de 13 étudiants : 5 garçons et 8 filles.

1. On tire un couple d'étudiants au hasard.

   a) Combien de tirages sont possibles ?

   b) Combien de tirages sont formées de 1 fille et un garçon ?

   c) Quelle est la probabilité de l'événement E : « On tire un couple fille-garçon » ?

2. Un calendrier d'anniversaires de la classe est une succession de 13 dates de l'année (un 13-uplet de l'ensemble [[1 ; 365]]).

   a) Combien il y a-t-il de calendriers anniversaires possibles pour cette classe ?

   b) Combien existe-t-il de calendriers d'anniversaires avec toutes les dates différentes ?

   c) Conclure : quelle est la probabilité de l'événement :

   E : « tous les étudiants de la classe aient leur anniversaire à une date différente ? »

   d) On donne $\frac{365!}{365^{13}\, 352!} \simeq 0{,}80$. Commenter l'ordre de grandeur du résultat.

Exercice 4

1. Soient x, y et z des réels positifs ou nuls.

   Montrer l'inégalité $(x + y + z)x \leq (x + z)(x + y)$

2. En déduire que pour deux événements A et B on a :

$$P(A \cup B)\, P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$$

On pourra utiliser l'inégalité précédente avec $x = P(A \cap B)$, $y = P(\bar{A} \cap B)$ *et* $z = P(A \cap \bar{B})$