Sujet de colle A

Semaine 38

Question de cours

Donner les identités remarquables $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.

Exercice 1

Montrer que les quatre nombres suivants sont identiques :

$$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad ; \quad b=\frac{2}{\sqrt{5}+1} \quad ; \quad c=\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad d=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \quad .$$

Exercice 2

Soit $A=(x-2)(2x+5)-(x-2)^2$

1. Ecrire A sous forme développée et sous forme factorisée.

2. Résoudre l'équation $(x-2)(2x+5)-(x-2)^2=0$

Exercice 3

1. Justifier que , pour tout nombre réel x on a :

$$x^5+5x^4+10x^3+11x^2+7x+2=(x+1)^2(x+2)(x^2+x+1)$$

2. Résoudre l'équation

$$x^5+5x^4+10x^3+11x^2+7x+2=0$$

3. Résoudre l'équation

$$e^{5x}+5e^{4x}+10e^{3x}+11e^{2x}+7e^x+2=0$$

Exercice 4

Pour tout entier naturel n, on pose $A_n=\frac{(9^{n+1}-9^n)^2}{(3^{n+1}-3^n)^4}$

1. Calculer A_0 et A_1 , puis conjecturer un résultat.

2. Démontrer la conjecture.

Sujet de colle B

Semaine 38

Questions de cours

1. Donner la définition de x^n pour x réel et n entier positif.

2. Donner les propriétés permettant de calculer x^{n+m} , $(x\times y)^n$ et $(x^n)^m$.

Exercice 1

Factoriser les expressions suivantes :

$$A=(4x-1)^3-(4x-1) \quad , \quad B=x^2-16-2(x-4)^2 \quad \text{et} \quad C=2x^3-2 \quad .$$

Exercice 2

Simplifier

$$A=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2 \quad \text{et} \quad B=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Exercice 3

1. Résoudre l'équation : $X^2+X-6=0$

2. En déduire les solutions des équations :

   a) $(E_1): x^4+x^2=6$

   b) $(E_2): e^x+1=6e^{-x}$

Exercice 4

Pour tout entier naturel n on pose $A_n=\left(2^{n+1}-2^n\right)^4\times\left(\frac{1}{4^{n+1}}-\frac{1}{4^n}\right)^2$.

1. Calculer A_0 et A_1 puis exprimer une conjecture.

2. Démontrer la conjecture.

Sujet de colle C

Semaine 38

Questions de cours

Rappeler les propriétés permettant de calculer $\ln(a\times b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ et $\ln\left(a^b\right)$, où $a>0$ et $b>0$.

Application : Déterminer les nombres x pour lesquels $3\times 2^x=2\times 3^x$

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad , \quad B=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{(1+6)^2}}}}} \quad \text{et} \quad C=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Exercice 2

1. Factoriser $A=3x(x+1)^2-(1-2x)(x+1)^2$

2. Résoudre l'équation $3x(x+1)^2=(1-2x)(x+1)^2$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1): 7x^2-\frac{7}{3}x=0 \quad , \quad (E_2): (x+1)^3=(2x+1)^3 \quad \text{et} \quad (E_3): \frac{x^2+1}{x-1}=x$$

Exercice 4

Discuter, selon la valeur de m, les solutions des équations suivantes :

$$(E_1): (m-2)x+1=5 \quad \text{et} \quad (E_2): x^2+2mx-2=0$$

Sujet de colle pour Khalil

Semaine 38

Questions de cours

Rappeler les propriétés permettant de calculer e^{a+b} , e^{a-b} et $\left(e^a\right)^b$, où $a>0$ et $b>0$.

Exercice 1

Montrer par récurrence que

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, $2k(-1)^k=k(-1)^k-(k+1)(-1)^{k+1}+(-1)^{k+1}$

2. a) Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k-(k+1)(-1)^{k+1}$

   b) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}$

3. Retrouver la formule permettant de calculer $S=\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k$

4. Que devient cette formule lorsque n est pair ? (On pourra écrire n = 2 p avec p entier)

5. Pour quelle valeur de n est-ce que $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k=2022$?

Exercice 3

Pour quelles valeurs du paramètre m les polynômes

$$P(X)=X^2+2X+m-4 \text{ et } Q(X)=X^2+X-7m+1$$

ont-ils une racines commune ? Quelle est cette racine ?

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. On appelle *n-ième polynôme cyclotomique* le polynôme $P_n(X)=X^n-1$

1. Donner une racine simple, qui est commune à tous les polynômes cyclotomiques.

2. a) Écrire les polynômes cyclotomiques $P_2(X)$ et $P_3(X)$ et $P_4(X)$

   b) Factoriser chacun de ces polynômes

3. Trouver une factorisation générale du polynôme cyclotomique $P_n(X)$

4. a) En distinguant les cas de figure « n pair » et « n impair » , dresser le tableau de variations de $P_n(X)$.

   b) Conclure : lorsque n est impair, quelles sont les racines du polynôme $P_n(X)$? Et lorsque n est pair ?