<u>**Sujet de colle A**</u>

Semaine 40

Question de cours

Donner la valeur de la somme usuelle $\sum_{k=1}^{n} k$ en fonction de n.

<u>Application :</u>

En déduire les valeurs de $A=1+2+3+...+100$ et $B=50+51+52+...+100$.

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

$$A_n=\sum_{k=0}^{n} 6(k^2-1) \quad , \quad B_n=\sum_{k=0}^{n} \frac{2k^2-2}{k+1} \quad \text{et} \quad C_n=\sum_{k=0}^{n} 2\times 3^{2k}$$

Exercice 2

1. Pour chacune de ces propositions, dire si elle est vraie ou fausse :

P_1 : $\forall\ x\in\mathbb{R}, x^2>0$

P_2 : $\exists x\in\mathbb{R}, 2x-1=12$

P_3 : $\exists n\in\mathbb{N}, 2n-1=12$

P_4 : $\forall\ n\in\mathbb{N}, \exists p\in\mathbb{N}, n=2p$

P_5 : $\exists x\in\mathbb{R}, \forall\ y\in\mathbb{R}, x<y^2$

P_6 : $\forall x\in\mathbb{R}, (x+1\neq 1 \text{ ou } x+2\neq 1)$

2. Écrire la négation de chacune de ces propositions.

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout entier relatif $k\geq 1$: $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ en fonction de l'entier n.

3. Pour quelle valeur de n a-t-on $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=8$?

Exercice 4 (plus difficile)

1. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $k\,2^k=(k+1)2^{k+1}-k\,2^k-2\times 2^k$.

2. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} (k+1)2^{k+1}-k\,2^k$

3. En déduire la formule permettant de calculer $S=\sum_{k=0}^{n} k\,2^k$

Sujet de colle B

Semaine 40

Question de cours

Donner la valeur de la somme usuelle $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de n.

Application :

En déduire les valeurs de $A=1^2+2^2+3^2+...+10^2$ et $B=2^2+4^2+...+10^2$ (nombres pairs au carré)

On commencera par exprimer A et B à l'aide d'un signe somme.

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}(5k+1) \quad , \quad B_n=\sum_{k=0}^{n} 2(k-1)^2 \quad \text{et} \quad C_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+3}}{3^{k+1}}\right)$$

Exercice 2

1. On considère l'implication $(x>1)\Rightarrow(x^2+3x+2>6)$.

   a) Cette proposition est-elle vraie ?

   b) Écrire sa réciproque. Est-elle vraie ?

2. (difficile) Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall n\in\mathbb{N}, a\times 2^n+b\times 3^n=0) \Leftrightarrow (a=b=0)$$

Exercice 3

1. Démontrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*, \dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

2. En déduire la valeur de la somme $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$ en fonction de *n*.

3. En vous inspirant des questions 1 et 2, calculez la somme $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ en fonction de *n*.

Exercice 4 (plus difficile)

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, $2k(-1)^k=k(-1)^k-(k+1)(-1)^{k+1}+(-1)^{k+1}$

2. a) Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k-(k+1)(-1)^{k+1}$

   b) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}$

3. En déduire la formule permettant de calculer $S=\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k$

Sujet de colle C

Semaine 40

Question de cours

Donner la définition de n ! (« n factorielle ») pour n entier naturel.

Exemple d'application : Calculer 3 ! et 4 ! et simplifier $\frac{(n+1)!}{n!}$

Exercice 1

1. Montrer que $(k+1)!-k!=k\times k!$ pour tout k entier.

2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k\times k!$ en fonction de n.

Exercice 2

1. Pour chacune de ces propositions, dire si elle est vraie ou fausse :

P_1 : $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-2x+1>0$ P_2 : $\exists n\in\mathbb{N}, n^2+n$ est impair

P_3 : $\exists x\in\mathbb{R}, (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$ P_4 : $(\exists x\in\mathbb{R}, x+1=0)$ et $(\exists x\in\mathbb{R}, x+2=0)$

2. Ecrire la négation de chacune de ces propositions.

3. On considère l'implication $x\geq 2\Rightarrow x^2+3x\geq 10$.

a) Cette proposition est-elle vraie ?

b) Écrire sa réciproque. Est-elle vraie ?

Exercice 3

On considère la somme $S_n=1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n\times(n+1)$ définie pour tout entier n ≥ 1.

Ainsi $S_1=1\times 2=2$ et $S_2=1\times 2+2\times 3=8$.

1. Calculer S_3 et S_4 .

2. Exprimer S_n à l'aide d'un signe Σ .

3. En déduire la valeur de S_n en fonction de n

Exercice 4 (plus difficile)

On considère la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+2n+1$.

Ainsi, $u_1=u_0+2\times 0+1$, $u_2=u_1+2\times 1+1$, etc. *Faire signe au colleur si vous n'avez pas compris.*

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2. Calculer la somme $S=\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}-u_k$ de deux manières :

a) Par un téléscopage.

b) En utilisant la formule de la suite.

3. En déduire la formule de u_n en fonction de n.

<u>Sujet de colle spécial Khalil</u>

Semaine 40

Question de cours

Donner la définition de n ! (« n factorielle ») pour n entier naturel.

Établir une relation entre (2n) ! et n!

Exercice 1

Déterminer les sommes doubles

$$A=\sum_{1\leq i,\ j\leq n} 2^{i+j} \quad \text{et} \quad B=\sum_{1\leq i\leq j\leq n} max(i\,,j)$$

max(i,j) désigne le plus grand des deux nombres i et j.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

1. Calculer et réduire P_0, P_1 et P_2.
2. Justifier brièvement que pour tout entier naturel, $P_n\geq 2$.
3. Établir un lien simple entre P_n et P_{n+1} puis donner le sens de variation de la suite (P_n)
4. Montrer que pour tout nombre réel x > - 1, on a $\ln(1+x)\leq x$
5. En déduire un majorant de ln(P_n)
6. Justifier la convergence de la suite (P_n) , et encadrer sa limite à l'aide des questions précédentes.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$

1. a) Montrer que la suite (I_n) ainsi définie est décroissante et positive.
   b) Justifier la convergence de la suite (I_n)
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0\leq I_n\leq\left(\ln(2)\right)^n$
4. En déduire la limite de la suite (I_n)
5. a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt\leq\frac{I_n}{\ln(2)}$
   b) Justifier $\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} I_n \leq\int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt$
6. En utilisant la question 5, déterminer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} I_n$

Exercice 4

Par dérivation d'une somme usuelle, déterminer la formule permettant de calculer

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} k\,q^k$$