

Interrogation n°3 – Sujet pour Khalil
Durée : 20 minutes

5/10/2020

Exercice 1

Pour tout entier naturel n , on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$.

1. Calculer les intégrales I_0 et I_1 .

2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

3. En déduire la limite de la suite (I_n)

Interrogation n°3 – Sujet pour Khalil
Durée : 20 minutes

5/10/2020

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$

5. Justifier que $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$

6. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt = 0$

Interrogation n°3 – Sujet pour Khalil
Durée : 20 minutes

5/10/2020

7. En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \times I_n)$

Exercice 2

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u_k$

Montrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n$

Interrogation n°3 – Sujet pour Khalil
Durée : 20 minutes

5/10/2020

Question bonus

Démontrer rigoureusement que toute implication est égale à sa contraposée,

c'est-à-dire $(P \Rightarrow Q) = (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$