Devoir surveillé n°2

Les documents, la calculatrice, et tout matériel électronique sont interdits.
Le soin, la précision et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation.

Questions de cours *(4 points)*

1. Rappelez la formule permettant de calculer $\binom{n}{k}$, lorsque $k \in [\![0;n]\!]$, à l'aide de factorielles.
2. Dans un classe de 10 étudiants, on souhaite choisir un groupe de 3 étudiants pour former un trinôme de colle. Combien de choix sont possibles ?
3. Développer et simplifier
$$A = \left(1+\sqrt{2}\right)^4$$
en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. *Raisonnements : questions variées (6 points).*

1. On considère la proposition
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p^2 = n$$

(a) Décrire cette proposition en français.

(b) Est-elle vraie ? *Justifiez*

(c) Écrire sa négation. Est-elle vraie ?

2. On considère l'implication
$$x \neq 1 \implies \frac{x}{2x-1} \neq 1$$

(a) Écrire sa contraposée.

(b) Démontrer que l'implication est vraie par contraposée.

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Exercice 2. *Une formule de sommation (5 points).*
On pour tout entier naturel n, on pose $A_n = n\ 2^n$

1. Calculer A_0 , A_1 et A_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel k on a
$$k2^k = (k+1)2^{k+1} - k2^k\ - 2 \times 2^k$$
On a donc prouvé que : $k2^k = A_{k+1} - A_k - 2 \times 2^k$

3. Simplifier la somme
$$\sum_{k=0}^{n} A_{k+1} - A_k$$
On pourra écrire cette somme en extension pour constater les simplifications.

4. Déduire des questions **2.** et **3.** que
$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n+1)2^{n+1} - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

5. En déduire, sans raisonner par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Exercice 3. *Opération ensembliste (4 points).*
Soit E un ensemble. Pour deux parties A et B de E, on définit l'opération
$$A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$

1. **Dans cette première question seulement**, on suppose que
$$E = [\![1:10]\!]\ ,\ A = \{1,3,4,5,7\} \text{ et } B = \{3,4,5,6,7\}.$$
Calculer $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ puis $A\Delta B$.

2. Calculer, de façon générale $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$.

3. Justifier que $A\Delta B = B\Delta A$ et que $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.

Exercice 4. *Suite de Lucas (9 points).*

Partie A : Résolution d'une équation.
On considère l'équation
$$(E) : x^2 - x - 1 = 0$$
d'inconnue x.

1. Résoudre l'équation (E).
On notera φ la plus grande des solutions et ψ la plus petite.

2. Montrer les trois propriétés suivantes :
(a) $\varphi^2 = \varphi + 1$
(b) $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$
(c) $\varphi \times \psi = -1$.

On admettra que, de façon analogue, on a : $\psi^2 = \psi + 1$ *et* $\psi = 1 + \dfrac{1}{\psi}$.

Partie B : Etude d'une suite de Lucas.
On considère la *suite de Lucas*, définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
c'est-à-dire : chaque terme est égale à la somme des deux termes précédents.

3. Calculer les quatre premières valeurs de cette suite.

4. Montrer que trois valeurs successives de la suite ne peuvent pas toutes être impaires.
On pourra raisonner par l'absurde, et utiliser la définition de la suite.

5. Montrer par récurrence double que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = \varphi^n + \psi^n$$
où φ et ψ sont les solutions trouvées dans la partie **A**.

6. Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de φ et ψ et montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$$

Exercice 5. *Étude matricielle de 3 suites imbriquées (12 points).*

Partie A : Étude des puissances d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$.

2. En déduire que la matrice A est inversible, et donner la matrice A^{-1}.

3. Démontrer que pour tout entier n,
$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$$

4. Écrire la matrice A^n sous forme de tableau 3×3.

5. La formule obtenue à la question précédente est-elle compatible avec la question 2 ?
C'est-à-dire est-elle valide pour $n = -1$ *?*

Partie B : Étude de suites imbriquées

On considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = & 3u_n & +v_n & -2w_n \\ v_{n+1} = & & 2v_n & \\ w_{n+1} = & u_n & +v_n & \end{cases}$$
on pose également $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

6. Que vaut la matrice-colonne X_0 ?

7. Calculer AX_n et vérifier que $X_{n+1} = AX_n$.
*A est la matrice définie dans la partie **A** de cet exercice.*

8. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $X_n = A^n X_0$.

9. En déduire l'expression X_n en fonction de n.

10. Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.