

*Les documents, la calculatrice, et tout matériel électronique sont interdits.
Le soin, la précision et la qualité de la rédaction seront pris en compte dans la notation.*

*Ce devoir est plus long et plus difficile que le dernier.
Ne vous découragez pas si vous bloquez, il y a de nombreuses questions qui se traitent façon isolée...*

Exercice 1. *Étude d'une fonction.*

On considère la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 8x + 1$$

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. Calculer la fonction dérivée de f .
3. Déterminer trois réels a , b et c de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 12x^3 - 4x - 8 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 2]$.
5. Justifier avec soin le fait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 1]$.
Combien de solutions existe-t-il à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0; 2]$?
6. La fonction f est-elle injective ? Justifier.
7. Donner l'intervalle image de la fonction f .

Exercice 2. *Étude de deux tirages sans remise.*

On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9. On note les événements

I_1 : « Le premier tirage donne un numéro impair. » et I_2 : « Le deuxième tirage donne un numéro impair. »

et A : « Les 2 boules tirées portent un numéro impair. »

1. Lorsque le premier tirage réalisé est impair, quelle est la probabilité que le second soit également impair ?
Donner la réponse sous forme de probabilité conditionnelle.
2. Faire un arbre résumant les réalisations successives de I_1 et I_2 , en précisant les probabilités utiles.
3. Déterminer les probabilités des événements I_1 , I_2 et A .
4. La deuxième boule tirée porte un numéro impair.
Quelle est la probabilité que la première boule tirée ait également un numéro impair ?
5. On se propose de déterminer la probabilité de A par une méthode de dénombrement.
 - (a) Montrer qu'il existe 36 tirages possibles de 2 boules dans l'urne.
 - (b) Dénombrer le nombre de tirages correspondant à l'événement A , c'est-à-dire formés de 2 nombres impairs différents.
 - (c) Retrouver $P(A)$.

Exercice 3. *Calcul matriciel et suites imbriquées.*

On considère les trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, w_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$$

Partie A : Étude des suites imbriquées.

1. (a) De quels types sont les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 (b) Exprimer les termes généraux v_n et w_n en fonction de n .
 (c) En déduire la relation $u_{n+1} - u_n = 2 \times 2^n + 1$.
2. (a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
 (b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? Géométrique ?
3. Simplifier la somme

$$\sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k$$

et calculer la somme

$$\sum_{k=0}^n (2 \times 2^k + 1)$$

4. En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n .

Partie B : Approche matricielle pour déterminer les suites.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note le vecteur-colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

5. Donner le vecteur-colonne X_0 .
6. Justifier que $X_{n+1} = AX_n$.
7. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.
8. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Calculer le vecteur-colonne X_n en fonction de n .
10. En déduire les expressions de u_n , v_n et w_n en fonction de n .

On veillera à retrouver les réponses de la partie A.

Problème. *Étude de suites liées à une situation probabiliste.*

Dans ce problème, on modélise des déplacements aléatoires par des suites. Ces suites sont définies dans la partie A. Ensuite, les parties B et C étudient ces suites de façon indépendante.

Partie A : Une situation probabiliste.

On considère un mobile se déplaçant sur les sommets A, B et C d'un triangle.

Sa position est déterminée par les règles suivantes :

- Initialement, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet A.
- Lorsque le mobile se trouve sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des deux *autres* sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note l'événement A_n (respectivement B_n, C_n) :

« Le mobile se trouve au sommet A (respectivement B, C) à l'instant n »

On notera a_n, b_n et c_n leurs probabilités respectives.

1. Expliquer pourquoi $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.
2. Donner les probabilités a_1, b_1 et c_1 .
3. À l'aide d'un arbre, déterminer les probabilités a_2, b_2 et c_2 .
4. En utilisant la formule des probabilités totales, relativement au système complet d'événements A_n, B_n et C_n , ou un arbre convenable, montrer que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = & \frac{1}{2}b_n & + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = & \frac{1}{2}a_n & + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = & \frac{1}{2}a_n & + \frac{1}{2}b_n \end{cases}$$

5. Justifier que pour tout entier naturel n , on a $a_n + b_n + c_n = 1$.

Partie B : Détermination des probabilités en chaque sommet.

On se propose de déterminer les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide de suites auxiliaires. Pour cela, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n - b_n \text{ et } v_n = a_n - c_n$$

6. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définies sont géométriques de raison $-\frac{1}{2}$.
7. Exprimer u_n en fonction de n , et exprimer v_n en fonction de n .
8. En utilisant la question précédente, ainsi que la question 5., montrer que $3a_n - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1$.
9. En déduire l'expression de a_n en fonction de n .
10. Conclure : déterminer les expressions de b_n et c_n en fonction de n .

Partie C : Une autre méthode pour déterminer les probabilités.

On se propose de déterminer la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une autre méthode ne faisant pas intervenir de suites auxiliaires.

11. En utilisant la définition des suites donnée à la question 4. montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$$

12. En déduire l'expression de a_n en fonction de n , en utilisant une méthode du cours.