

Exercice 6. *Inspiré par ECRICOME 2022.*

Les parties B et C de cet exercice sont indépendantes, mais nécessitent les matrices de la partie A.

Tout au long de ce exercice, la matrice nulle d'ordre 3 sera notée 0_3 et la matrice identité d'ordre 3 sera notée I_3 .

Partie A : Calcul matriciel.

On considère les matrices $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = I_3 - A$.

1. Expliciter la matrice B .
2. Calculer les matrices $A \times B$ et $B \times A$.
3. Vérifier par le calcul que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

Partie B : Résolution d'une équation matricielle.

Dans cette partie, on cherche à déterminer les matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, avec a, b des nombres réels, vérifiant

$M^2 = M$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble solution.

4. Justifier que les matrices A et B de la partie A sont solutions.
5. Montrer qu'une matrice M est solution si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

6. En déduire que les solutions recherchées sont $\mathcal{S} = \left\{ 0_3 ; I_3 ; A ; B \right\}$.

Partie C : Étude matricielle de suites imbriquées.

On considère les matrices $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 2, v_0 = 2, w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n + w_n + 2 \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n + w_n - 2 \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 4w_n \end{cases}$$

On pose par ailleurs $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

7. Donner le vecteur X_0 .
8. Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = TX_n + Y$.
9. Déterminer un vecteur-colonne $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $L = TL + Y$.
10. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a

$$X_n = T^n(X_0 - L) + L$$

11. Déterminer deux réels α et β tel que $T = \alpha A + \beta B$, où les matrices A et B ont été définies dans la partie A.
12. Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$T^n = \alpha^n A + \beta^n B$$

13. Déterminer l'expression de X_n en fonction de n , et en déduire u_n , v_n et w_n en fonction de n .
14. Déterminer les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.