Devoir surveillé n°3

Durée : 4 heures

Exercice supplémentaire pour Khalil

22 décembre 2023

Problème. *La série exponentielle.*

Le but de ce problème est de démontrer la formule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

Partie A : Convergence de la série.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} = S_n + \frac{1}{n!}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n! \geq n$.
En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!}$.
2. Calculer et simplifier les sommes S_1, S_2, T_1 et T_2 .
3. Simplifier $S_{n+1} - S_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (S_n) .
4. Montrer que la suite (T_n) est décroissante.
5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n - S_n) = 0$.
6. Que peut-on dire des suites (S_n) et (T_n) ? Justifier leur convergence.

Partie B : Étude d'une fonction et limite de S_n .

On définit, pour tout réel x et tout entier n ,

$$f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad g_n(x) = f_n(x) - (e-1)\frac{x^n}{n!}$$

7. Montrer que $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$.
On pourra, au choix, écrire $f_{n+1}(x)$ en extension avant de dériver, ou bien dériver cette fonction directement, en s'autorisant une dérivée 'dans la somme'.
8. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in [0; 1]$ on a $f_n(x) \geq 0$.
Pour l'hérédité, on pourra dresser le tableau de variations de f_{n+1} en y précisant $f_{n+1}(0)$.
9. En considérant une valeur particulière de x , montrer que $e \geq S_n$.
10. **On admet qu'en procédant comme dans la question 8. on prouve que $g_n(x) \leq 0$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$.** En considérant une valeur particulière de x , montrer que $e - \frac{e-1}{n!} \leq S_n$.
11. Conclure : donner un encadrement de S_n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Partie C : Approche informatique.

12. On considère l'algorithme **Python** suivant :

```
1 import math
2
3 n=100
4 S=0
5
6 for k in range(0,n+1):
7     S=S+1/math.factorial(k)
8
9 T=S+1/math.factorial(n)
10
11 print(S,T)
```

La commande `math.factorial(n)` permet de calculer la factorielle $n!$.

- (a) Qu'est-ce que ce programme calcule?
- (b) À l'exécution de ce programme, il affiche

2.7182818284590455 2.7182818284590455

Qu'est ce que ce résultat nous apprend ?