Devoir libre n°6

À rendre le 8/1/2024

Vous pouvez travailler sur ce devoir en groupe (3 maxi par groupe)

Exercice 1 *Systèmes*

Choisir et traiter l'un des trois

Choix A (Facile)

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x & +3y & +z & =4 \\ -x & +y & +2z & =3 \\ 7x & +3y & -5z & =2 \end{cases}$

Choix B (Moyen)

1. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x & +y & +z & =a \\ x & -y & -z & =b \\ -3x & +y & +3z & =c \end{cases}$. On exprimera les inconnues x,y,z en fonction de a,b,c.

2. Écrire le système précédent sous forme matricielle A X = B.

3. À l'aide de la question 1, déterminer la matrice inverse A^{-1}

Choix C (Difficile)

Soit k un nombre réel donné. On considère alors le système $\begin{cases} x & -y & +z & =0 \\ kx & +8y & +2z & =0 \\ 2x & +ky & +z & =0 \end{cases}$

Pour quelles valeurs de k ce système est-il de Cramer ?

Exercice 2 *Raisonnement par récurrence*

Choisir et traiter l'un des trois

Choix A (facile) : Pour tout entier naturel non nul, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1-\frac{1}{n+1}$

Choix B (calculatoire) : Soit $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$A^n=\begin{pmatrix} 5^n+n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n-n5^{n-1} \end{pmatrix}$$

Choix C (difficile) : Soit q un réel différent de 1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\,q^{k-1} = \frac{(n-1)q^n - n\,q^{n-1}+1}{(1-q)^2}$$

Devoir libre n°6

À rendre le 8/1/2024

Exercice 3 *Suites récurrentes*

Choisir et traiter l'un des trois

Choix A (Facile)

1. On considère la suite définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=7u_{n+1}-10u_n$.

   Déterminer l'expression du terme général u_n en fonction de n.

2. On considère la suite définie par $u_0=-1$ et $u_{n+1}=3u_n+4$.

   a) Déterminer l'expression du terme général u_n en fonction de n.

   b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Choix B (Moyen)

1. On considère la fonction définie par $f(x)=x^2-2x+2$ pour $x\in[1;2]$.

   Dresser les tableaux de variations de f sur [1;2]. Préciser le minimum et le maximum de la fonction.

2. On considère la suite définie par $u_0=\frac{3}{2}$ et $u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$.

   a) Calculer et simplifier u_1 et u_2 .

   b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leq u_n\leq 2$. (On pourra utiliser la question 1 au moment de l'hérédité)

Choix C (Plus difficile)

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$ <u>sans faire appel à la méthode du cours</u> sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

On définit les matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

1. Calculer BC et CB .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul: $B^n=B$ et $C^n=(-1)^{n-1}C$
3. Vérifier que $A^2=5A-6I_2$
4. Etablir que la matrice A est-inversible et donner A^{-1} .
5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $A^n=3^nB-2^nC$
6. Cette relation est-elle encore vraie pour $n=-1$? *C'est-à-dire a-t-on* $A^{-1}=\frac{1}{3}B-\frac{1}{2}C$?

8. Vérifier que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$.
9. En déduire une formule permettant de calculer $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$ en fontion de A, n, u_0 et u_1 .
10. Donner l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Devoir libre n°6

À rendre le 8/1/2024

Exercice 4 *Probabilités*

Choisir et traiter l'un des trois

Choix A (Facile)

On considère deux bourses :

- La bourse U contient deux pièces d'or et trois d'argent.
- La bourse V contient quatre pièces d'or et une d'argent.

On commence par choisir une bourse au hasard puis on effectue des tirages avec remise selon la règle suivant :

- Si on tire une pièce d'or, on recommence le tirage dans la même bourse.
- Si on tire une pièce d'argent, on recommence le tirage dans l'autre bourse. .

Déterminer les probabilités pour que :

1. les trois premiers tirages soient faits dans la bourse U ;
2. le deuxième tirage se fasse dans la bourse U ;
3. on tire une pièce d'argent au deuxième tirage ;
4. le deuxième tirage ait été fait dans la bourse U sachant que l'on a tiré une pièce d'or à ce deuxième tirage.

Choix B (Moyen)

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes. Après une mise initiale, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (⋆) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements suivants :

H : « les trois jetons sont alignés horizontalement » V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».

D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ». N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités P (H) , P (V) , P (D) des événements H, V et D.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à $P(N)=\frac{19}{21}\simeq 0.9048$.

   Quelle est la probabilité de victoire ?

Devoir libre n°6

À rendre le 8/1/2024

Choix C (Difficile)

On reprend le contexte du choix A, et la succession de tirages avec remise dans les deux bourses.

Pour tout entier naturel et non nul n, on note :

- U_n : « le tirage numéro n s'effectue dans la bourse U »
- V_n : « le tirage numéro n s'effectue dans la bourse V »
- O_n : « le tirage numéro n amène une pièce d'or »
- A_n : « le tirage numéro n amène une pièce d'argent ».

1. Donner les probabilités conditionnelles suivantes :

a) $P_{U_n}(O_n)$ b) $P_{U_n}(A_n)$ c) $P_{V_n}(O_n)$ d) $P_{V_n}(A_n)$

Aucune justification n'est demandée.

2. Pour tout entier naturel et non nul n, on note :

u_n la probabilité de l'événement U_n et v_n la probabilité de l'événement V_n .

a) Calculer u_1 , u_2 , v_1 et v_2 .

b) Justifier que $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}v_n$. *On pourra utiliser la formule des probabilités totales ou un arbre bien choisi.*

c) En déduire que : $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{1}{5}$. *On pourra justifier que $v_n=1-u_n$ et utiliser la question 3. b)*

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel et non nul n.

e) Quelle est la probabilité que le 10[e] tirage se fasse dans la bourse U ? Donner une valeur approchée.

Devoir libre n°6

À rendre le 8/1/2024

Exercice 5 *Calcul de limites*

Choisir et traiter l'un des trois

Choix A (Facile)

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{3n^3 - n - 2}{n-1}$.

1. Déterminer des nombres réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^3 - n - 2 = (n-1)(an^2 + bn + c)$.

2. En utilisant cette factorisation, déterminer la limite de la suite (u_n) .

Choix B (Moyen)

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 12$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $s_n = u_n - v_n$

   a) Reconnaître la suite (s_n) ainsi définie.

   b) Exprimer s_n en fonction de n.

2. On définit, pour tout entier n, $t_n = 8v_n + 3u_n$.

   Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est constante, et donner la valeur de t_n .

3. Déterminer l'expression de u_n , puis de v_n , en fonction de n.

4. Déterminer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Choix C (Difficile)

1. On considère la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

   a) Dresser le tableau de variations de f , en y indiquant la valeur de $f(0)$.

   b) Quel est le minimum de la fonction f ? En quelle valeur de x est-il atteint ?

2. On considère à présent la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln(u_n^2 + 1)$$

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le 2$

   b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) . *On utilisera les calculs de la question 1.*

   c) Justifier que la suite (u_n) converge.

3. On suppose que la limite L de la suite (u_n) vérifie l'équation

$$L = \ln(1 + L^2)$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Devoir libre n°6

À rendre le 8/1/2024

Exercice 6 *Informatique*

Choisir et traiter l'un des trois

Choix A (Facile)

On considère l'algorithme Python suivant :

```
a=int(input('Entrez a'))
b=int(input('Entrez b'))
a=a+b
b=a-b
a=a-b
print(a,b)
```

1. Exécuter – sur papier – l'algorithme dans le cas où l'utilisateur entre a=1 et b=3. Recommencer avec a=5 et b=2.
2. Selon vous, à quoi sert cet algorithme ? Conjecturer une utilité.
3. (optionnel) Démontrer la conjecture de la question 2.

Choix B (Moyen)

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{3} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n \end{cases}$

1. Créer un algorithme Python qui calcule et affiche les 10 premières valeur de la suite.
2. Exécuter l'algorithme et conjecturer une propriété de la suite.

   (si besoin, utiliser une site comme https://www.online-python.com/)
3. Démontrer la conjecture par récurrence.

Choix C (Difficile)

On considère la *suite de Syracuse* définie par un nombre $u_0 \in \mathbb{N}$ donné et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Programmer un algorithme Python qui calcule et affiche 20 termes de la suite, dans le cas où $u_0 = 10$.

   Recommencer avec $u_0 = 11$.

   Pour cet algorithme, on pourra utiliser le 'test' `if X%2==0` *qui vérifie si un nombre X est pair.*
2. Recommencer avec différentes valeurs initiales u_0 , et conjecturer un résultat sur cette suite.
3. La *durée de vol* d'une suite de Syracuse est le premier rang N pour lequel $u_N = 1$.

   On pourra vérifier, à titre d'exemple, que lorsque $u_0 = 10$ la durée de vol vaut 6.

   De même, lorsque $u_0 = 11$ la durée de vol vaut 14

   Créer une algorithme Python qui calcule la durée de vol d'une suite de Syracuse, pour une valeur u_0 donnée.
4. Trouver une valeur de u_0 la durée de vol est supérieure à 100.