Devoir libre n°7

À rendre le 29/1/2024

Exercice 1

On dispose de deux urnes :

- L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires.
- L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 3 boules noires.

On effectue uen succession de tirages avec remise selon le procédé suivant :

- Le premier tirage se fait dans l'urne U_1
- Si un tirage donne une boule blanche, le suivant se fait dans l'urne U_1.
  En revanche, s'il donne une boule noire, on fait le tirage suivant dans l'urne U_2.

Pour un entier n donné, on note

B_n : "Le n-ième tirage donne une boule blanche" , N_n : "Le n-ième tirage donne une boule blanche" et $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 et p_2 .

2. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? *On pourra commencer par calculer* $P(B_1 \cap B_2)$.

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, ou un arbre convenable, démontrer que pour tout entier n, $p_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4}$

4. Montrer que pour tout entier n non nul : $p_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter cette limite.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

4. On admet que la limite L de la suite (u_n) vérifie $L = \frac{L}{1+L^2}$. *(Point fixe)*

   Déterminer $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.