Devoir libre n°3 – Sujet pour Khalil

À rendre le 6/11/2022

Exercice 1 *Matrices et suites*

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$.

On définit les matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

1. Calculer BC et CB .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul: $B^n=B$ et $C^n=(-1)^{n-1}C$
3. Montrer que pour tout entier naturel n : $A^n=3^n B-2^n C$
4. Vérifier que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$.
5. En déduire une formule permettant de calculer $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$ en fontion de A, n, u_0 et u_1 .
6. Donner l'expression du terme général u_n en fonction de n en utilisant la question 5.
7. Retrouver ce résultat avec une méthode de cours.

Exercice 2 *Ensembles, binôme de Newton*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0,k\text{ pair}}^{n}\binom{n}{k}$ et $T_n=\displaystyle\sum_{k=0,k\text{ impair}}^{n}\binom{n}{k}$.

Calculer S_n+T_n et S_n-T_n , puis donner la valeur de S_n et T_n .

Exercice 3 *Calcul Matriciel*

On considère la matrice $T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, et on se propose de rechercher toutes les matrices vérifiant M²=T.

1. Montrer qu'une telle matrice vérifie nécessairement M T = T M
2. Montrer, en utilisant la question 1, que la matrice M est de la forme $M=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & 0 & e\end{pmatrix}$
3. En déduire l'ensemble des matrices vérifiant M²=T.

Devoir libre n°3 – Sujet pour Khalil

À rendre le 6/11/2022

Exercice 4 *Calcul matriciel abstrait*

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant $M^3=0$.

1. Donner un exemple d'une telle matrice.

2. Calculer et simplifier $(M-I_3)(I_3+M+M^3)$

3. Soient A et B des matrices vérifiant $A^3=0$, $B^3=0$ et A B = BA

   a) Montrer que $(AB)^3=0$

   b) Montrer que $(A+B)^6=0$

Exercice 5 *Produit et coefficients binomiaux*

Soit n un entier naturel non nul et x un réel. On pose $P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?

2. Montrer que pour tout réel x non-nul on a $P_n(x)=\frac{x+n}{x}P_n(x-1)$

3. En déduire $P_n(2)$, $P_n(3)$

4. Exprimer de manière générale $P_n(k)$ à l'aide d'un coefficient binomial.

Exercice 6 *Formule de Bernoulli et application*

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul et tous réels a et b, on a :

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}$$

2. Pour cette question, on suppose a et b strictement positifs.

   En utilisant la question 1, montrer que $(a^n=b^n) \Leftrightarrow (a=b)$

Exercice 7 *Il faut en finir avec cette formule*

On souhaite prouver la surprenante formule : $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1. Soit x un réel non nul, montrer que $\frac{1-(1-x)^n}{x}=\sum_{p=0}^{n-1}(1-x)^p$

2. On pose pour tout $x\in\mathbb{R}, f(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k}x^k$

   Démontrer que $f'(x)=-\sum_{p=0}^{n-1}(1-x)^p$

3. En utilisant l'égalité $f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)dx$, démontrer la formule attendue.