Devoir libre n°3

À rendre le 6/11/2022

Ce devoir possède 2 parties : la partie A (obligatoire) comporte 5 exercices de rafraîchissement.

La partie B comporte des exercices d'approfondissement, que vous pouvez traiter en partie ou pas du tout.

Si vous essayez de traiter ces exercices, je tiendrai compte de vos tentatives dans la notation de ce devoir.

Partie A (obligatoire) : exercices de rafraîchissement

Exercice 1

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

1. Calculer tous les produits possibles de 2 de ces matrices.
2. Calculer toutes les opérations possibles parmi les suivantes :

$$ {}^tA+B \quad , \quad 3A+3B-C \quad , \quad B+{}^tC \quad , \quad A-D \quad , \quad A^2 \quad \text{et} \quad D^2 $$

Exercice 2

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices J^2 , $A\times J$, $J\times A$ et A^2 .
2. Établir pour tout entier naturel n : $A^n=I_2+\frac{1}{2}(3^n-1)J$. *Raisonner par récurrence.*
3. Écrire la matrice A^n sous forme de tableau.

Exercice 3

On considère la suite défini par : $\begin{cases} u_0=0\\ u_1=1\\ u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n\end{cases}$

Montrer par récurrence d'ordre 2 que pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\dfrac{3^n-1}{2}$.

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

$$A=\sum_{k=1}^{n}(8k-7) \qquad B=\sum_{k=1}^{143}2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \qquad C=\sum_{k=1}^{11}\left(-\frac{k}{4}+\frac{5}{2^{k-1}}\right)$$

Exercice 5

Montrer, en raisonnant par récurrence, la formule suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n} \quad .$$

Devoir libre n°3

À rendre le 6/11/2022

Partie B : Exercices d'approfondissement

Exercice 1 *Récurrence*

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

Exercice 2 *Somme*

1. En dérivant une somme usuelle, déterminer la formule permettant de calculer $\sum_{k=0}^{n} k\, q^{k-1}$ pour $q \neq 1$.

2. En déduire la formule permettant de calculer $\sum_{k=0}^{n} k\, q^{k}$ puis

$$S=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k=-1+2-3+4-5+6+\ldots$$

3. Que devient cette formule lorsque n est pair ? (On pourra écrire n = 2 p avec p entier)

4. Pour quelle valeur de n est-ce que $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k=2022$?

5. Démontrer la formule de la question 2 par récurrence.

Exercice 3 *Ensembles, binôme de Newton*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k}$.

Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$, puis donner la valeur de S_n et T_n .

Exercice 4 *Calcul Matriciel*

On considère la matrice $T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on se propose de rechercher toutes les matrices vérifiant M²=T.

1. Montrer qu'une telle matrice vérifie nécessairement M T = T M

2. Montrer, en utilisant la question 1, que la matrice M est de la forme $M=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

3. En déduire l'ensemble des matrices vérifiant M²=T.

Exercice 5 *Calcul matriciel abstrait*

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 vérifiant $M^3=0$.

1. Donner un exemple d'une telle matrice.

2. Calculer et simplifier $(M-I_3)(I_3+M+M^3)$

3. Soient A et B des matrices vérifiant $A^3=0$, $B^3=0$ et A B = BA

   a) Montrer que $(A\,B)^3=0$

   b) Montrer que $(A+B)^6=0$