Devoir libre n°4

À rendre le 27/11/2023

Exercice 1

Soit x un nombre réel positif. Démontrez, par récurrence sur *n*, l'*inégalité de Bernoulli* :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 2

Traiter l'un des deux choix :

Choix A (facile) : Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x & -y & +z & =1 \\ 2x & +y & +z & =-5 \\ 2x & +13y & -7z & =-1 \end{cases}$

Choix B (difficile) : Trouver les valeurs de λ pour lesquelles le système

$$\begin{cases} (4-\lambda)x & -3y & -z & =0 \\ 4x & -(3+\lambda)y & -2z & =0 \\ -x & +y & +(2-\lambda)z & =0 \end{cases}$$

est de Cramer.

Exercice 3

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=A-2I_3$.

1. Montrer que $B^2=3B$.

2. En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n=2^n I_3+\dfrac{5^n-2^n}{3}B$