Feuille d'exercices 5 : Matrices

Exercice 1.
On considère les matrices A, B, C et D ci-dessous. Calculer tous les produits possibles.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&6\\2&4&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&1&3&0\\0&1&0&3&0\\1&-1&0&3&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-3\\2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&0\\1&0\\1&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.
On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2&0\\7&-4\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A+B$, $2A-B$, $A\times B$, $B\times A$, ${}^t(A\times B)$ et ${}^tB\times{}^tA$ (vérifier l'égalité), puis $3\times(A-2B)+2\times(3B+C)-(2A+C)$.

2. Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X\in M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.
Soit $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $M\in M_3(\mathbb{R})$ telles que $A\times M=M\times A$.

Exercice 4.
Soit $B=\begin{pmatrix}-5&-6\\4&-5\end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $A\in M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2=B$.

Exercice 5.
Soit $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n\geq 1, J^n=3^{n-1}J$.

Exercice 6.
Dans chacun des cas suivants, déterminer A^n

1. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ 4. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 5. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

Exercice 7.
Soit $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2=7A-10I_3$.

2. À l'aide de la question ***1.***, exprimer A^3 en fonction des matrices A et I_3.

3. Montrer par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}, A^n=\frac{1}{3}(5^n-2^n)A+\frac{1}{3}(5\times 2^n-2\times 5^n)I_3$$

Exercice 8.
On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0=2$, $v_0=-1$, et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}u_{n+1}=6u_n-v_n\\v_{n+1}=u_n+4v_n\end{cases}$$

1. Déterminer une matrice A telle que $\forall n\in\mathbb{N},\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}=A\times\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

2. Montrer que $A=5I_2+J$ où J est une matrice à déterminer.

3. Vérifier que $J^2=0$ et en déduire A^n pour $n\in\mathbb{N}$.
Penser à vérifier la formule pour n=0 et n=1.

4. Exprimer alors u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 9.
Soit $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux nombres a et b tels que $A^2=aA+bI$.

2. En déduire que la matrice A est inversible et donner A^{-1} .

Exercice 10.
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $A\times B\neq 0$ et $B\times A=0$.

1. (a) Montrer que ni A ni B est inversible. *On pourra raisonner par l'absurde.*
(b) Démontrer que $(A\times B)^2=0$.

2. Donner un exemple de matrices vérifiant ces conditions dans le cas n=2.

Exercice 11. *D'après ESCP 2011, Voie T.*
Soit A, J, K et I les quatre matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer K^2 et K^3.
  (b) Déterminer K^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

2. (a) Exprimer A en fonction de I et K.
  (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, A^n en fonction de I, K, K^2 et de n.
  (c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression explicite de la matrice A^n en fonction de n.
  (d) Vérifier que le résultat trouvé est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

3. Montrer que A est inversible. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

4. *Une première façon de calculer A^{-1}*
  (a) Calculer J^2, et pour tout entier k supérieur ou égal à 3, calculer J^k.
  (b) Exprimer A en fonction des matrices I, J et J^2.
  (c) Calculer $\left(I + 2J + 3J^2\right)\left(I - 2J + J^2\right)$
  (d) En déduire la matrice A^{-1}.

5. *Une deuxième façon de calculer A^{-1}*
  (a) Calculer les matrices A^2 et A^3.
  (b) Quelle est la matrice $A^3 - 3A^2 + 3A$?.
  (c) En déduire l'écriture de A^{-1} en fonction de I, A et A^2.
  (d) Vérifier que ce résultat est cohérent avec celui établi à la question ***4.*** (d)

Exercice 12.
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 , A^3 puis A^n pour tout entier naturel n.

2. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 13.
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A sous la forme $aI_3 + bJ$ où a et b sont des nombres à déterminer.

2. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
On pourra utiliser le résultat $J^n = 3^{n-1}J$ établi dans l'exercice 5.

Exercice 14.
Une matrice A est dite *nilpotente* s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

1. Donner un exemple d'une telle matrice.

2. Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ?

3. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent.
Montrer que les matrices $A \times B$ et $A + B$ sont nilpotentes.

Exercice 15.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 – A – 2I = 0$.

2. En déduire que la matrice A est inversible et donner A^{-1}.

3. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} 2y + 4z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$.

Exercice 16.
On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$.

2. En déduire que la matrice A est inversible.

3. Démontrer que pour tout entier n,

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$$

et écrire la matrice A^n sous forme de tableau 3×3.