Feuille d'exercices 6 : Applications

Exercice 1. *Valeur absolue.*
Exprimer les formules suivantes sans le symbole valeur absolue :
$A = \left|3\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)\right|$; $B = |3\ln(6) - 2\ln(4) - \ln(9)|$; $C = \left|\ln(1+e^2)\right|$; $D = \left|3 - \sqrt{2}\right|$

Exercice 2. *Valeur absolue.*
Exprimer sans le signe valeur absolue, selon les valeurs de x, les expressions suivantes :
$A = |x+1|$, $B = |1-2x|$ et $C = 3|2x+5| + |x+2|$

Exercice 3. *Valeur absolue, équations et inéquations.*
Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue x :

1. $|x+1| = 2$
2. $|x+1| - |2x+1| = 0$
3. $|x+1| + |2x+1| = 0$
4. $|x-1| < 2$
5. $|x+1| \geq 2$
6. $|2x+1| = |x+3|$
7. $|4-2x| \leq 8$
8. $\left|x^2\right| - |x| = 0$

Exercice 4. *Valeur absolue, représentation graphique.*
Représenter, à main levée, les fonction définies par les expressions suivantes :
$f_1(x) = |1-2x|$, $f_2(x) = \left|x^2 - 1\right|$ et $f_3(x) = |\ln(x)|$

Exercice 5. *Interprétation concrète de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.*
On considère une ensemble de touristes E, et un ensemble de chambres d'hôtel F.
Une répartition des touristes dans les chambres est une application $f \ : E \to F$.
Interpréter les affirmation suivantes, en termes de répartition des touristes :

1. « L'application f est injective »
2. « L'application f est surjective »
3. « L'application f est bijective »

Exercice 6. *Diverses applications.*
Les application suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ? *Dans ce cas, donner la bijection réciproque.*

$$f_1 \ : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{pmatrix} \ , \ f_2 \ : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+^*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{3+\ln(x)} \end{pmatrix} \ , \ f_3 \ : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x^3+1} \end{pmatrix}$$

$$f_4 \ : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x \mapsto \frac{2x+3}{x-3} \end{pmatrix} \ , \ f_5 \ : \begin{pmatrix}]-\infty;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1-x) \end{pmatrix} \ , \ f_6 \ : \begin{pmatrix}]2,\infty[\to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto 2x^2 - 8x + 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. *Étude des variations d'une bijection.*
Soit $f \ : \mathbb{R}^{+^*} \to \mathbb{R}^{+^*}$ définie par $f(x) = e^{\frac{2}{x}}$.

1. Montrer que l'application f est strictement décroissante.
2. Montrer que f réalise une bijection et donner l'expression de son application réciproque.
3. Donner les variations de f^{-1}.

Exercice 8. *Application sur des domaines variables.*
On considère l'application $f : A \to B$ définie par $f(x) = x^2$. Dans chacun des cas suivants, préciser si f est injective, surjective, bijective.

1. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$
2. $A = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R}$
3. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}^+$
4. $A = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R}^+$
5. $A = \mathbb{R}^-, B = \mathbb{R}^+$
6. $A = \mathbb{R}^-, B = \mathbb{R}^-$.

Exercice 9. *Application sur* $\mathbb{N}$.
Soit $f \ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n+1$.
L'application f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 10. *Application sur* $\mathbb{N}$.
Soit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si n est pair} \\ n & \text{si n est impair} \end{cases}$.
L'application f est-elle injective ? Surjective ?