Feuille d'exercices 7 : Systèmes linéaires

Exercice 1.
Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} -x & +2y & -z & =-5 \\ x & -4y & +2z & =7 \\ -2x & -2y & +2z & =0 \end{cases} \qquad (S_2)\ :\ \begin{cases} & y & -z & =1 \\ 2x & +y & +z & =3 \\ x & & +z & =1 \end{cases}$$

$$(S_3)\ :\ \begin{cases} x & +2y & +3z & =1 \\ x & -3y & -4z & =0 \\ -3x & +4y & +5z & =1 \end{cases} \qquad (S_4)\ :\ \begin{cases} x & -y & +z & =1 \\ 2x & +y & -z & =2 \\ x & -2y & +3z & =0 \end{cases}$$

Exercice 2.
Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} -3x & +y & +z & +t & =0 \\ x & -3y & +z & +t & =0 \\ x & +y & -3z & +t & =0 \\ x & +y & +z & -3t & =0 \end{cases} \qquad (S_2)\ :\ \begin{cases} 3x & +y & +2z & +t & =3 \\ 3x & -2y & +2z & & =1 \\ 3x & +y & +2z & & =2 \\ 3x & & +2z & & =4 \end{cases}$$

$$(S_3)\ :\ \begin{cases} x & +y & -3z & -t & =0 \\ 2x & +y & -5z & +4t & =4 \\ x & -2y & & +3t & =-2 \\ -x & +y & +z & -2t & =1 \end{cases}$$

Exercice 3.
Résoudre les systèmes suivants en fonction de a, b, c et d.

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} -x & +2y & -z & =a \\ -4x & +5y & -3z & =b \\ -2x & +2y & -z & =c \end{cases} \qquad (S_2)\ :\ \begin{cases} x & +y & +z & =a \\ x & -y & -z & =b \\ -3x & +y & +3z & =c \end{cases}$$

$$(S_3)\ :\ \begin{cases} 3x & -3y & -2z & =a \\ -4x & +4y & +3z & =b \\ 2x & -2y & -z & =c \end{cases}$$

Exercice 4.
Pour quelles valeurs de λ les systèmes suivants sont-ils de Cramer ?
Résoudre chaque système, dans le cas où il est de Cramer.

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} (2-\lambda)x & +3y & =0 \\ 3x & +(2-\lambda)y & =0 \end{cases} \qquad (S_2)\ :\ \begin{cases} \lambda x & +y & =2 \\ x & +\lambda y & =2 \end{cases}$$

$$(S_3)\ :\ \begin{cases} (2-\lambda)x & & +4z & =0 \\ 2x & -(4-\lambda)y & +12z & =0 \\ x & -2y & +(5-\lambda)z & =0 \end{cases}$$

Exercice 5.

1. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y+\ z\ +\ t\ =2 \\ 4x+4y+\ z\ +4t=3 \\ 6x+7y+2z+5t=5 \end{cases}$$

2. En déduire les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} X^2Y^3ZT &= e^2 \\ (XYT)^4Z &= e^3 \\ X^6Y^7Z^2T^5 &= e^5 \end{cases}$$

Exercice 6.
On considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$.

On suppose, pour cet exercice, que la formule donnant cette somme n'est pas connue.

1. Calculer S_0, S_1 et S_2.

2. On admet qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = an^2+bn+c$.
En utilisant la question ***1.***, montrer que a, b et c sont solutions d'un système carré d'ordre 3.

3. Résoudre ce dernier système, et retrouver la valeur de S_n.