

Feuille d'exercices 8 : Bijections et dénombrement

Exercice 1. *Bijections sur \mathbb{R} .*

Démontrer que les fonctions suivantes réalisent une bijection de l'intervalle I sur un intervalle à préciser.

1. $f_1(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ avec $I =]2 ; 3]$
2. $f_2(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ avec $I = [0; 1]$
3. $f_3(x) = 2\sqrt{x} - x + 3$ avec $I = [0 ; 1]$
4. $f_4(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ avec $I = [-1; 1]$

Exercice 2. *Équations réelles.*

Montrer que chacune des équations suivantes possède une solution dans l'intervalle I . Est-elle unique ?

$$(E_1) : \ln(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 2} \text{ avec } I = [1 ; 10]$$

et

$$(E_2) : e^x = 2 + x \text{ avec } I = [\ln(2) ; 2\ln(2)]$$

Exercice 3. *Équation réelle à paramètre.*

On considère un entier $n \geq 2$ et on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que la fonction f ainsi définie réalise une bijection de $I = [0; 1]$ vers un intervalle à préciser.
2. Montrer que l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 4. *Disposition de personnes sur des places.*

1. Sept personnes sont debout, et on possède trois chaises.
De combien de manières peut-on asseoir les gens ?
2. On dispose ensuite de trois chaises et deux tabourets.
Même question, en considérant qu'un tabouret et une chaise sont deux objets différents.

Exercice 5. *Combinaisons d'un coffre-fort.*

Le coffre-fort d'une banque est protégé par un code à 4 chiffres.

Combien il y a-t-il de codes possibles ?

1. Si on suppose que tous les chiffres de la combinaison sont différents ?
2. Si on sait que seuls les chiffres 1, 3 et 7 sont utilisés ?
3. Si on sait que les deux premiers chiffres sont identiques ?

Exercice 6. *Différents dénombrements.*

1. Dans la carte d'un restaurant, on compte 4 entrées, 2 plats et 3 desserts.
Combien de menus plat-entrée-dessert sont possibles ?
2. Un acteur possède 9 paires de chaussures, 12 pantalons et 18 chemises.
De combien de façons peut-il s'habiller ?

Exercice 7. 1. Combien existe-t-il de nombres écrits avec six chiffres différents ?

2. Combien existe-t-il de nombres pairs à six chiffres ?
3. Combien existe-t-il de nombres de six chiffres ne comportant aucun 8 ?

Exercice 8. *Anagrammes.*

1. Combien d'anagrammes peut-on former avec le nom MAROT ?
2. Combien d'anagrammes peut-on former avec le nom CLEMENT ?
3. Combien d'anagrammes peut-on former avec le CLEMENT MAROT ?

Exercice 9. *Mains de cartes.*

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément une main de cinq cartes.

1. Combien existe-t-il de mains possibles ?
2. Combien existe-t-il de mains avec deux as ?
3. Combien existe-t-il de mains avec au maximum deux as ?
4. Combien existe-t-il de mains avec un full « 3 as – deux rois » ?

Exercice 10. *Tirages de jetons.*

On considère un sac contenant dix jetons, numérotés de 1 à 10, dans lequel on pioche simultanément quatre jetons.

1. Combien il y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages ne comportent aucun jeton avec un numéro en dessous de 3 ?
3. Combien de tirages sont formés de deux nombres pairs et deux nombres impairs ?
4. Combien de tirages comportent au moins trois nombres pairs ?