Feuille d'exercices 9 : Suites numériques

Exercice 1. *Étude de variations.*
Étudier les variations des suites suivantes, définies explicitement sur $\mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{n-1}{n+2} \ , \ v_n = \frac{n^2+1}{n} \ , \ w_n = \frac{2^n}{n} \text{ et } z_n = \frac{n}{2n-1} \ .$$

Exercice 2. *Minoration, majoration par inégalités.*
Déterminer si les suites suivantes sont minorées, majorées
$$u_n = \frac{n+2}{2n+1} \text{ et } v_n = \frac{n^2+2}{n}.$$

Exercice 3. *Encadrement et sens de variation d'une suite.*
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Démontrer que pour tout entier n, u_n est bien définie et $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4. *Monotonie, minoration et expression explicite.*
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n^2$.
3. Conjecturer, puis démontrer, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5. *Encadrement et sens de variation d'une suite.*
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4u_n - 3}$

1. Montrer que pour tout n, u_n est bien définie et $1 \leq u_n \leq 3$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 6. *Suites arithmétiques et géométriques.*
Les suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}$ de façon explicite, sont elles arithmétiques ? géométriques ?
$$u_n = 3n + 5 \ , \ v_n = \frac{n+1}{n^2+1} \text{ et } w_n = 3 \times 2^n \ .$$

Exercice 7. *Utilisation d'une suite auxiliaire.*
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n-1}{u_n+3}$.

1. Démontrer que si $u_{n+1} = 1$ alors $u_n = 1$. En déduire que pour tout n, $u_n \neq 1$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
   Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
3. En déduire une expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n.

Exercice 8. *Suites imbriquées.*
Soient u et v les deux suites définies pour tout n ≥ 0 par
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \ .$$

1. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Reconnaître les deux suites t et s.
   (b) En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp. s_0).
2. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0 .

Exercice 9. *Suite auxiliaire.*
Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$.

1. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n + n + 1$ vérifie $z_{n+1} = 2z_n$.
2. En déduire une expression de z_n , puis de u_n , en fonction de n.

Exercice 10. *Suite auxiliaire.*
Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^3$.
Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire v définie sur $\mathbb{N}$ par
$$v_n = \ln(u_n).$$

1. Montrer que v_n est bien définie pour tout n , puis reconnaître la suite (v_n) .
2. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 11. *Diverses expressions en fonction de n à déterminer.*
Pour chacune des suites suivantes, exprimer le terme général u_n en fonction de n.

1. $u_0 = 3$ et $\forall n, u_{n+1} = 2u_n - 3$
2. $u_0 = -2$ et $\forall n, u_{n+1} + 3u_n = 1$
3. $u_0 = -1$ et $\forall n, u_{n+1} + u_n = 2u_n - 4$
4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 15u_n$
5. $u_0 = 2, u_1 = 4$ et $\forall n, u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n$

Exercice 12. *Suite récurrente d'ordre 2 non linéaire.*
Soit u la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 0$.
2. On considère la suite w définie pour tout n par $w_n = \ln(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite w suit une récurrence linéaire d'ordre 2.
   (b) Expliciter alors le terme général de la suite w en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 13. *Suite auxiliaire arithmético-géométrique.*
Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.
Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que v est une suite arithmético-géométrique ;
2. En déduire le terme général de v, puis de u, en fonction de n.

Exercice 14. *Suites imbriquées.*
On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définie par $x_0 = 2, y_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n \end{cases}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$
2. En déduire l'expression de x_n, puis de y_n, en fonction de n.

Exercice 15. *Sens de variation.*
Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n(1 + u_n^3)$
2. $u_0 = e$ et $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n^2)$
3. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$
4. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 1}$ *Raisonner par récurrence.*

Exercice 16. *Majoration, minoration, bornitude.*

1. Justifier que la suite définie par $u_n = \frac{n+2}{2n+1}$ est minorée par 0 et majorée par 2.
2. Justifier que la suite définie par $u_n = \frac{n^2+2}{n}$ est minorée par 1.
3. Justifier que la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{4u_n - 3}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 17. *Suites auxiliaires.*

1. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$. On pose $v_n = u_n^2$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
   (b) En déduire une expression de v_n , puis de u_n en fonction de n.
2. On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$. On pose par ailleurs $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 18. *Suites de référence, calcul du terme général en fonction de n.*
Pour chacune des suites suivantes, calculer le terme général u_n en fonction de n.

1. $u_{n+1} - u_n = 3$ et $u_0 = 10$
2. $u_{n+1} + 2u_n = 0$ et $u_0 = 7$
3. $2u_{n+1} = u_n$ et $u_1 = 3$
4. $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 4$ et $u_0 = 0$
5. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$ avec $u_0 = u_1 = 1$
6. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$ avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$